La matematització del món

Societat Catalana de Matemàtiques
Institut d'Estudis Catalans

Pròleg

Coincidint amb la celebració a Zuric, els passats dies 3 a 11 d'agost, del 22è Congrés Internacional de Matemàtics, el rectorat de la Universitat de Zuric dedicà la revista trimestral que edita, Unizürich, *al tema «La matematització del món».*

Aquest volum no és altra cosa que la traducció al català dels articles de l'esmentada revista. Hem inclòs també el parlament de la Sra. Ruth Dreifuss en el discurs inaugural del Congrés.

La Societat Catalana de Matemàtiques, el Centre de Recerca Matemàtica de l'Institut d'Estudis Catalans i els traductors dels articles ofereixen graciosament aquest volum a tota la comunitat matemàtica de llengua catalana i a tots aquells que estiguin interessats a conèixer més de prop el paper de les matemàtiques en el desenvolupament científic i tecnològic.

Hem d'agrair molt especialment al rectorat de la Universitat de Zuric, que ha autoritzat aquesta traducció, als traductors de cadascun dels articles —J. Aguadé, J. Bagaria, P. Bayer, C. Casacuberta, S. Comalada, A. Dou, E. Nart, M. Sanz, J. Vaquer, S. Xambó— el fet d'haver acceptat la proposta amb entusiasme i a Maria Julià que n'ha fet la composició.

Manuel Castellet
Director CRM
Editor

Sumari

Dipòsit Legal:
B-42656/94

L'impacte de les matemàtiques en el món actual

RUTH DREIFUSS

Senyores i senyors,

Fa ara uns cent anys, el 1897, va tenir lloc a Zuric el primer Congrés Internacional de Matemàtics. El 1932, el Congrés va celebrar-se a Suïssa per segona vegada. En aquella ocasió foren introduïdes les Medalles Fields com l'equivalent del Premi Nobel. Avui el nostre país acull el seu congrés per tercera vegada. Cap altre país ha estat honorat d'aquesta manera per la comunitat científica matemàtica i estic segura que el *genius loci* demostrarà gratitud per la seva fidelitat i assegurarà l'èxit del treball de vostès.

Personalment, jo em sento molt honorada d'inaugurar aquest congrés. És una oportunitat gens freqüent acollir les primeres figures mundials d'aquest art i entrar en contacte amb el seu debat científic.

Si el tema del congrés fos la investigació del càncer o la història moderna, seria senzill per a un profà entendre de què va la discussió. En canvi, les matemàtiques, a primer cop d'ull, sembla que són una eina abstracta tancada en ella mateixa o un art exclusivista.

Fa dos anys, a Rio de Janeiro, sota el patrocini de la UNESCO, fou proclamat l'*Any Matemàtic Mundial 2000.* En aquella ocasió, la Unió Matemàtica Internacional va definir una visió de les matemàtiques que insistia en la relació entre ciència i societat. La Declaració de Rio de Janeiro estableix que *les matemàtiques pures i aplicades són una de les claus més importants per entendre el món i el seu desenvolupament.* Estic segura que la societat necessita aquestes claus.

Però com que no sóc matemàtica, em pregunto quines portes obren aquestes claus i quina societat hi trobarem darrera. Per tant, m'agradaria aprendre de vostès com veuen els matemàtics el seu paper en la societat.

Amb la idea de la relació entre ciència i societat al cap, vaig trametre tres preguntes a una dotzena dels més eminents matemàtics del món i estic molt agraïda per les respostes que he rebut. En les dues primeres preguntes em referia a la distinció entre matemàtiques pures i aplicades esmentada en la Declaració de Rio.

La primera pregunta feia referència a matemàtiques pures. Dóna la impressió que funcionen en un reialme completament independent. Els seus resultats no tenen com a propòsit la utilitat, sinó la seva veritat. La claredat d'aquesta veritat produeix una bellesa que eleva les matemàtiques pures a una forma d'art. Però, al revés que un arpista que delecta els altres amb la seva música, em temo que el matemàtic pur no pot fer accessible aquest art a una àmplia audiència. La meva pregunta fou aleshores: com pot la matemàtica pura justificar aquest art a l'estat que la financia?

Per a Beno Eckmann, la matemàtica *estableix l'estàndard per a qualsevol raonament objectiu* i d'acord amb Friedrich Hirzebruch, *sense matemàtiques no hi hauria pensament lògic estructurat.*

Per a Raoul Bott, *el tresor que busquen (els matemàtics) està en el cor mateix de tot [...] obtenir respostes precises sobre el món [...] Com a tal (la seva) recerca ha d'ésser una inquietud central de qualsevol estat il·lustrat.*

Hi estic d'acord i estic convençuda de la necessitat del pensament matemàtic com un component fonamental del món modern. Històricament les matemàtiques han estat una clau per obrir portes a la Il·lustració. Avui, les matemàtiques pures poden ésser considerades encara com el guardià del graal del raonament lògic.

Però, com va dir Roland Bulirsch, *les matemàtiques són cultura invisible.* A més, Jürgen Moser diu que *les matemàtiques poden no ésser accessibles al plaer d'una àmplia audiència.* Si aquesta cultura de les matemàtiques pures és invisible i inaccessible, com es pot, aleshores, demostrar el seu ús pràctic i fer públics els seus resultats tangibles?

Armand Borel explica que *les matemàtiques són com un iceberg: a sota de la superfície hi ha el reialme de les matemàtiques pures, amagat de la vista de la gent. [...] Per sobre de l'aigua hi ha la punta, la part visible que nosaltres anomenem matemàtiques aplicades.*

D'acord amb Phillip Griffiths, *un dels misteris més profunds de la vida és de quina manera les millors matemàtiques pures, desenvolupades per elles mateixes, inexplicablement i impredictiblement esdevenen útils.*

Jürgen Moser afegeix que *la dificultat de fer entendre aquest missatge radica en el gran període de temps que es necessita per a reconèixer el valor dels descobriments matemàtics. [...] A vegades han de passar més de vint anys [...] Malauradament, els polítics pensen sovint en terminis molt més curts.*

Això és certament veritat no només per als polítics, sinó per a la societat en general. En els temps moderns insistim en períodes cada cop més curts per a qualsevol cosa de la nostra vida. Volem un rendiment immediat de les nostres inversions. Volem informació en temps real. El període de vida de les tecnologies esdevé cada vegada més curt. Els costos d'eficiència i la velocitat han esdevingut els criteris bàsics per a jutjar qualsevol activitat humana. Això és perillós perquè és miopia.

En un entorn com aquest és molt important seguir reconeixent que el saber és un valor en ell mateix. Les matemàtiques, com la filosofia o qualsevol investigació bàsica es desenvolupa només gràcies a aquest principi, que és una part important de la nostra civilització. Si comencem a oblidar-lo, comprometem les arrels del nostre progrés.

El futur no es pot predir. No podem jutjar el saber basant-nos en la seva utilitat immediata. Per exemple, el treball de Vaughan Jones, que va connectar la teoria de nusos tridimensionals amb l'anàlisi funcional, fou guardonat amb la Medalla Fields en el darrer congrés a Kyoto en base al seu mèrit intrínsec. Més tard, aquesta teoria fou utilitzada pels físics en mecànica estadística i pels biòlegs per explicar l'estructura del DNA. És només a través del reconeixement i del suport a la investigació bàsica que la societat pot assegurar el desenvolupament complet i continuat del progrés científic.

Passem a la matemàtica aplicada. Actualment les matemàtiques aplicades han esdevingut una base per a totes les altres ciències i tenen un enorme impacte en la vida de les societats modernes. Per això les matemàtiques aplicades són altament relevants i útils a la societat, però han perdut la seva innocència. Nogensmenys, contrastant amb el debat sobre la responsabilitat de la física nuclear i de l'enginyeria genètica, tinc la impressió que hi ha hagut una escassa discussió ètica sobre el paper de les matemàtiques en la societat. Per tant, aquesta és la meva segona pregunta: les matemàtiques, han eludit aquesta discussió?

Hi ha matemàtics que afirmen neutralitat moral per a la seva ciència. René Thom, per exemple, m'escrivia que *les matemàtiques per elles mateixes són èticament neutrals.*

Però, Sir Michael Atiyah em recordava en la seva resposta que *la bomba atòmica fou construïda només després de llargs càlculs matemàtics,* i Jürgen Moser afegeix que *els famosos matemàtics von Neumann i Ulam van jugar un paper important en aquest projecte.*

Armand Borel pregunta: *s'hauria de considerar el fet que les matemàtiques són a la base de l'artilleria o de les bombes teledirigides com un problema ètic?* Sí, jo penso que sí.

És cert que *la majoria dels matemàtics són lluny de les decisions de l'aplicació del seu treball,* com apuntava Friedrich Hirzebruch. Beno Eckmann va encara més enllà quan diu: *per a les pròpies matemàtiques aquesta discussió (ètica i política) és irrellevant. [...] Com a activitat intel·lectual pura, no pot ésser influenciada per una discussió d'aquest tipus. Sens dubte, aquells que apliquen les matemàtiques han d'afrontar aquesta discussió.*

Nogensmenys, no crec que fent distinció entre la teoria abstracta i l'aplicació pràctica es pugui eliminar el problema ètic. Devem als matemàtics bona part del progrés de la nostra societat i hem de reconèixer llurs mèrits, però, al mateix temps, els matemàtics han d'assumir llurs responsabilitats.

Raoul Bott ha expressat el seu argument en contra de la neutralitat ètica, escrivint-me que *l'edat de la innocència s'ha acabat per a tots nosaltres.*

Estic convençuda que això és veritat no només per a la ciència sinó per a la majoria d'activitats humanes. Avui, gràcies a la ciència, la nostra societat ha desenvolupat un enorme poder per controlar la natura. Aquest poder ens capacita per agafar el nostre destí amb les nostres mans. Però, aquest poder ens força a assumir les responsabilitats inherents. Si l'edat de la innocència ha arribat a la seva fi, hem d'admetre que ha estat reemplaçada per l'edat de la responsabilitat.

Passem a la meva última pregunta: si, com a ministra d'Educació, tingués la possibilitat de crear deu noves càtedres a les universitats suïsses, quantes n'hauria d'assignar a matemàtiques i per què?

Phillip Griffiths és generós amb la seva ciència i contesta: *totes haurien d'ésser per a científics matemàtics.*

També opina així Gerd Faltings: nou càtedres per a matemàtiques, però —com que li agrada la música— deixa la desena per a un arpista.

Sir Michael Atiyah, Friedrich Hirzebruch i Jürgen Moser en reclamen quatre o cinc per a matemàtiques. Aquesta és més o menys la mitjana de totes les respostes. De fet, actualment a Suïssa només una de cada vint càtedres és de matemàtiques.

Algunes respostes fan èmfasi exclusivament en les necessitats de les ciències naturals. Això és sorprenent. Quan hom considera la complexitat dels problemes amb què s'encara la societat, estic convençuda que la seva solució requerirà un esforç decidit i finançat de les ciències socials i les humanitats, en col·laboració estreta amb les ciències naturals.

En vista de la creixent importància de la ciència, comprenc per què els científics demanen més mitjants, per què volen més càtedres que les que tenen. Dels científics, cada vegada s'espera més que trobin solucions a tots els nostres problemes. És més que legítim que vostès demanin a la societat els mitjants necessaris.

La ciència i la recerca són crucials avui dia. D'això, no me n'han de convèncer com a ministra d'Educació, però junts hem de convèncer la gent i al Parlament. Hem de convèncer als contribuents. Aquesta és una tasca difícil quan els pressupostos públics acumulen enormes dèficits.

Un problema és que no som conscients del creixent impacte de la ciència a la societat quan conduïm un cotxe o quan utilitzem el telèfon. La majoria de la gent no pensa en el científic, el treball del qual és darrera de qualsevol cosa de la nostra vida diària. Pregunteu, per exemple, a qualsevol suís «De qui és el retrat que hi ha al bitllet de deu francs?» Seran incapaços de dir-vos-ho. No han observat mai que és Leonhard Euler. Probablement, no saben ni qui és Euler.

És responsabilitat de la comunitat científica dir a la gent per què la ciència és important. És la seva responsabilitat i la meva.

Els desitjo el millor per al seu congrés. Gràcies.

Discurs de la Sra. Ruth Dreifuss, ministra federal d'Educació de Suïssa, en la inauguració del Congrés Internacional de Matemàtics el 3 d'agost de 1994 a Zuric.

De famílies, nens prodigi i autodidactes

Abans del 1850 grans matemàtics suïssos van ensenyar en diverses universitats d'Europa. Amb la fundació d'algunes universitats a Suïssa a la segona meitat del segle XIX, la matemàtica a la nostra terra va viure un ressorgiment per la crida de joves matemàtics alemanys especialment ben dotats. L'any 1897 va tenir lloc el primer Congrés Internacional de Matemàtics a Zuric.

MAX-ALBERT KNUS

El segle XVIII és el *gran segle* matemàtic de Suïssa. Després de la mort de G. W. Leibniz el 1716, el desenvolupament de la matemàtica va ser portat principalment pels Bernoulli i per Euler. Van ser descobertes eines que encara avui són indispensables.

A causa de la seva fe protestant, la família Bernoulli es va escapar d'Holanda i es va establir a Basilea al començament del segle XVII. Nikolaus (el vell) Bernoulli (1623–1708), conseller del Tribunal de Justícia, és la soca d'una família de matemàtics que en tres generacions en va donar vuit. Des del 1687 la Càtedra de matemàtiques de la Universitat de Basilea va estar ocupada pels Bernoulli durant més de cent anys. Jakob I (1654–1705) no és només el primer matemàtic de la família, sinó també el primer matemàtic suís famós.

Després d'uns estudis de teologia, va començar a estudiar d'una manera autodidàctica la (en aquella època) nova anàlisi de Leibniz i Newton. Des del 1687 fins a la seva mort, el 1705, va ser professor a Basilea. Els seus resultats més significatius són en les aplicacions geomètriques del càlcul diferencial i del càlcul integral (ell és considerat el fundador del càlcul de variacions) i per altra banda en la teoria de probabilitats. La llei dels grans nombres, segons la qual quan el nombre de proves creix, la freqüència relativa tendeix cap a la probabilitat de l'esdeveniment, es troba en el gran treball *Ars conjectandi* que va ser publicat pòstumament el 1713 pel seu nebot Nikolaus I.

El successor de Jakob I en la Càtedra de matemàtiques de la universitat va ser el seu germà Johann I (1667–1748), que era professor a Groningen des del 1695. Johann primer va estudiar medicina i després va ser introduït a la matemàtica pel seu germà. Al principi van treballar molt units fins que per qüestions de prioritat es van enemistar totalment. Els principals treballs de Johann són en el domini del càlcul integral i del càlcul de variacions. A partir del 1710 va començar a aplicar la nova anàlisi a la física i a la mecànica.

Encara que el conflictiu Johann era temut com a professor, va tenir deixebles famosos com Leonhard Euler (1707–1783), Pierre Louis Moreau de Maupertius (1698–1759), Gabriel Cramer (1704–1752) i Alexis Claude Clairaut (1713–1765). Maupertius, nascut a Sant Malo, provenia d'una molt respectada, antiga i noble família. Durant anys va ser president de l'Acadèmia de Berlín i va tenir un paper important en la introducció de la física de Newton al continent. Va ser el primer en reconèixer la importància del principi de la mínima acció. Ell va morir a casa de Johann II, fill de Johann I Bernoulli.

El ginebrí Gabriel Cramer encara és conegut avui per la seva obra *Àlgebra*. Per a ell i per al seu amic Jean-Louis Calandrini (1703–1758) va ser creada el 1724 una Càtedra de matemàtiques a l'Acadèmia de Ginebra, quan tots dos tenien una mica més de vint anys. D'una manera alternativa la regentava un dels dos mentre l'altre estava de viatge d'estudis.

Com a nen prodigi matemàtic, Alexis Claude Clairaut va viure a París. Als dotze anys va presentar a l'Acadèmia de París resultats d'investigació propis. Als divuit anys era membre de l'Acadèmia.

Daniel (1700–1782), el segon fill de Johann I, era un savi universal. A Peterburg primerament va ser professor de física i després de matemàtiques, i en tornar a Basilea va ser professor de botànica i d'anatomia. El 1750 va ser professor de física. El 1760 va defensar la vacunació contra la verola.

Els altres matemàtics de la família Bernoulli no han tingut tanta importància. És curiós que quasi tots els matemàtics no ho van ser de primer ofici sinó que després d'altres estudis —normalment el dret— van ser atrets per les matemàtiques. Molt prest tota la família Bernoulli es va convertir en una llegenda. Es conta la següent anècdota de Daniel: en un viatge, en una conversa, ell es va presentar a un desconegut i va rebre la sarcàstica contesta «i jo sóc Isaac Newton».

Johann I Bernoulli (1667–1748)

Matemàtics suïssos del segle XVIII...

Leonhard Euler, fill d'un pastor d'ànimes de Basilea, primer va estudiar teologia i després matemàtiques amb Johann I Bernoulli. Als dinou anys va sol·licitar, sense èxit, una plaça de professor de física a Basilea, i un any més tard va seguir a Peterburg els seus dos amics Daniel i Nikolaus II Bernoulli, tots dos fills de Johann I, amb l'esperança d'obtenir una plaça de professor de fisiologia a l'Acadèmia. El 1725 Catarina la Gran va fundar l'Acadèmia de Peterburg i va intentar fer-hi anar Johann I. Aquest va refusar la crida i va enviar-hi els seus dos fills, Daniel i Nikolaus II. El 1731 Euler va ser professor de física a l'Acadèmia i dos anys més tard de matemàtiques. Els mals moments que passava Rússia el van determinar a seguir una crida de Frederic II per anar a l'Acadèmia de Berlín. Les diferències que van sorgir amb el rei van fer que Euler tornés a Peterburg el 1766. Euler «cessa de vivre et de calculer» (Condorcet, *L'Éloge*) el 18 de setembre del 1783. El nom d'Euler es troba a tot arreu en la matemàtica: encara avui els matemàtics treballen cada dia en les equacions, fórmules, integrals, nombres, angles d'Euler i apliquen teoremes d'Euler. Aragó ha dit: «Euler va calcular sense esforç visible, així com els homes respiren i les àguiles volen». Això no és cap exageració, si hom pensa amb quina facilitat Euler va escriure els seus tractats científics. Indubtablement, Euler és el matemàtic més fructífer de la història.

Gabriel Cramer (1704–1752)

Leonhard Euler (1707–1783)

El 1909 la Societat Suïssa de Ciències va decidir publicar-ne les obres completes. Entretant quasi tots els tractats matemàtics han estat publicats. Amb tot, caldran deu anys o més per a tenir enllestida la seva correspondència.

Un altre matemàtic suís que al segle XVIII va tenir un paper important fora de Suïssa va ser Lambert (1728–1777). Nat a Mülhausen, després d'un aprenentatge de sastre, va treballar de secretari amb un jurista de Basilea. El 1748 va començar a fer de professor particular amb la família von Salis a Chur. Durant els anys 1756–1764 va viatjar per Holanda, França, Itàlia i Alemanya primer com a acompanyant del seu alumne i després pel seu compte. El 1764 es va establir a Berlín, el 1765 va veure realitzada la seva esperança de ser membre de l'Acadèmia i el 1770 va obtenir un càrrec públic com a conseller d'Obres Públiques.

Lambert és un dels típics erudits universals del segle XVIII. Com a complet autodidacte va obtenir significatives contribucions en ciències naturals, en tècnica, en lògica, en matemàtica, en filosofia i en art. En matemàtiques és conegut principalment per la seva demostració de la irracionalitat del nombre π. Va ser descrit pels seus contemporanis com una personalitat especialment original. La seva conducta i els seus vestits sovint irritaven tot Berlín.

També va ser autodidacte Jean Robert Argand (1768–1822). Nat a Ginebra, va viure com a simple tenidor de llibres a París. En un escrit imprès privadament va ser un dels primers a publicar una clara representació geomètrica de les operacions amb nombres complexos. De la seva vida no es coneix gairebé res.

...i del segle XIX

Els grans matemàtics suïssos del segle XIX foren Jakob Steiner (1796–1863), el geòmetra, i Charles-François Sturm (1803–1855), l'analista. Com Euler i Lambert van fer la seva carrera fora de Suïssa.

Jakob Steiner nat a Utzenstorf, fill d'un pagès, no va aprendre a llegir fins als catorze anys. Als divuit anys va deixar la seva família per anar a l'escola de Johann Heinrich Pestalozzi a Yverdon. El gran pedagog de seguida es va adonar del talent del jove i el va enviar a estudiar matemàtiques a Heidelberg. Després de quatre semestres, Steiner se'n va anar a Berlín. Per a ell va començar un temps difícil durant el qual va guanyar-se la subsistència mitjançant classes particulars i com a professor ajudant. El 1834 Steiner, que més tard va ser considerat com «el geòmetra més gran del seu temps», va ingressar com a membre de l'Acadèmia i va ser nomenat professor de la universitat. Des del 1857 les malalties van perjudicar fortament les seves facultats creadores. Va morir l'1 d'abril de 1863, durant unes vacances a Berna.

Charles-François Sturm va nèixer a Ginebra. La seva família havia deixat Estrasburg el 1760, i el seu pare, un esperit rigorós i sistemàtic, vivia molt senzillament com a mestre. Va morir quan el seu fill tenia setze anys. Després d'uns estudis de matemàtiques a l'Acadèmia de Ginebra (en aquella època encara no era universitat), Sturm va entrar a la família de Broglie com a professor particular del fill petit de la famosa Madame de Staël. En aquella època la família vivia en el palau Coppet. Quan Sturm va tornar a París va tenir l'oportunitat de visitar la capital i allà va entrar en contacte amb els grans matemàtics i físics francesos com Aragó, Laplace, Poisson, Fourier, Gay-Lussac i Ampère. En particular, va ser guiat científicament per Fourier. Després d'alguns anys d'ensenyament en escoles secundàries va ser elegit professor a la famosa École Polytechnique i més endavant a la Sorbona. El seu *Cours d'Analyse* és encara avui famós.

Ludwig Scläfli (1814–1895) també va ser una personalitat interessant del segle XIX. Com molts matemàtics d'aquell temps, primer va estudiar teologia, precisament a la nova Universitat de Berna. Com a jove mestre a Thun va emprar el temps lliure (i els diners estalviats) per estudiar matemàtiques. El 1843 uns coneguts el van presentar a Steiner. Aquest estava a punt d'anar a Roma amb Jacobi (1804–1851), Dirichlet (1805–1859) i Borchardt (1817–1880) per passar-hi l'hivern. Steiner va proposar emportar-se Schläfli com a intèrpret, perquè ja era coneguda la seva facilitat per aprendre idiomes juntament amb la seva aptitud per a les matemàtiques. A Roma Schläfli va traduir a l'italià treballs de Jacobi i Steiner. Com a compensació ell va rebre ensenyament privat dels savis berlinesos, especialment de Dirichlet, li va ensenyar teoria de nombres. De tornada a Berna va començar a ensenyar a la universitat fins que el 1853 el van nomenar professor.

Johann Heinrich Lambert (1728–1777)

Jakob Steiner (1796–1863)

Richard Dedekind (1831–1916)

La seva obra principal *Theorie der vielfachen Kontinuität* va ser acabada de publicar després de la seva mort. Aquest treball, en el qual es generalitzen a espais n-dimensionals molts resultats de la geometria euclidiana, és de molt difícil lectura i moltes de les coses que hi ha van ser redescobertes més tard per altres matemàtics i exposades en un llenguatge més clar.

A Suïssa fins a la meitad del segle XIX només hi havia tres universitats: Basilea amb la seva llarga tradició, Zuric i Berna, fundades el 1833 i el 1834 respectivament. L'ensenyament de les matemàtiques estava limitat a la geometria i elements de càlcul diferencial i integral. El paisatge acadèmic va canviar completament amb la fundació de l'Escola Politècnica de Zuric (ETH) el 1855 i amb la transformació en universitats de les acadèmies de Ginebra (1874), Lausana (1890), Neuchâtel (1909) i la fundació de la Universitat de Friburg (1889). La matemàtica també va viure un resorgiment, amb tot, hem de confessar amb modèstia, que en part va ser mèrit de joves matemàtics alemanys (llavors encara no establerts) que van començar la seva carrera a Suïssa i particularment, a Zuric. Mencionem, entre d'altres, Richard Dedekind (1831–1916), Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), Georg Friedrich Frobenius (1849–1917) i Hermann Minkowski (1864–1909).

Fins al 1850 famosos matemàtics suïssos van ensenyar en diverses universitats d'Europa. A la segona meitat del segle XIX van anar a Suïssa grans matemàtics alemanys. Avui hi ha un intercanvi en les dues direccions. Si la matemàtica s'ha mantingut molt viva a Suïssa, és mèrit de tots els matemàtics que hi ensenyen i hi investiguen i de tots els matemàtics de l'estranger amb els quals s'ha maldat per tenir contactes personals i científics. Aquesta circumstància explica, tal vegada, per què Suïssa té la noble tasca d'albergar per tercera vegada el Congrés Internacional de Matemàtics el 1994, després dels del 1897 i 1932.

Max-Albert Knus és professor de matemàtiques a l'ETH de Zuric.

La bellesa dels espais i les formes

Els políedres convexos són alguns dels objectes matemàtics més antics i simples però, tanmateix, un estudi aprofundit de la seva configuració ens condueix a múltiples i significatives preguntes. Què és un políedre convex? És una figura limitada per un nombre finit de superfícies planes i que és convexa, és a dir, donats dos qualssevol dels seus punts, el segment que els uneix és contingut en el políedre. Els cossos platònics: tetràedre, cub, octàedre, dodecàedre i icosàedre són exemples de políedres convexos.

PETER MANI I BEAT JAGGI

Els cinc cossos platònics

En aquestes cinc figures antiquíssimes ja poden endevinar-se dos camins que parteixen dels políedres convexos: un primer camí s'endinsa cap a l'interior de les matemàtiques, l'altre s'expandeix cap enfora, cap a la pràctica, cap a la natura (figura 1). Volem convidar el lector a fer amb nosaltres algunes curtes passejades per aquests dos camins.

Al llarg del primer d'aquests camins podem contemplar el tretzè llibre dels Elements d'Euclides, on es descriuen meticulosament els cinc cossos platònics i es demostra que, fora d'ells, no hi ha al nostre espai cap altre políedre regular.

En el segon camí trobem la idea, que avui dia difícilment podem acceptar, que cada un dels cinc cossos regulars ha de correspondre's amb un dels cinc elements de l'univers: foc, terra, aigua i aire i la cinquena substància, innombrada. Si avancem prop de dos mil anys enllà, ens trobem amb J. Kepler. Segons la seva teoria, entre la matemàtica i el món exterior hi ha d'haver una harmonia perfecta. En particular, les òrbites planetàries estarien determinades de manera simple a partir dels políedres regulars. És força curiós observar com aquesta teoria va ser contradita i definitivament enterrada, després d'un esgotador treball i, segurament, amargues llàgrimes, pel seu propi creador, ben a l'inrevés de com ha passat amb tantes altres teories fantasioses.

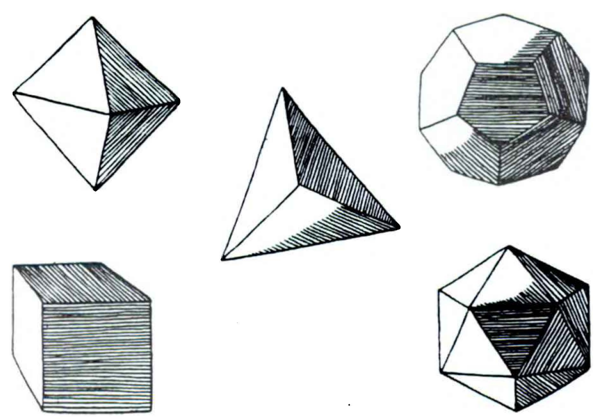


Figura 1. Els cinc cossos platònics.

La fórmula d'Euler

En el primer dels dos camins anteriors, volem ara fer esment d'un petit estudi de L. Euler, on aquest observa que sempre es compleix la relació $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ entre els nombres f_i dels elements i-dimensionals de la vora d'un políedre convex. Aquí f_0 és el nombre de vèrtex, f_1 el d'arestes i f_2 el de cares del políedre en qüestió. No ha estat fins a l'època contemporània que s'ha vist que l'equació d'Euler no és més que el primer pas d'una nova teoria dels espais i les formes que es coneix amb el nom de *topologia* i és una de les parts més belles de la recerca matemàtica. No podem pas estendre'ns aquí en aquesta teoria, però heus aquí un petit exemple: si dibuixem una xarxa qualsevol sobre la superfície d'un tor i calculem el valor de $f_0 - f_1 + f_2$ obtenim sempre zero, mentre que si fem el mateix sobre una «superfície amb dos forats» el resultat és sempre -2.

Abans de passar a parlar dels temps actuals, donem una volta pel llac de Thun, al bell mig de Suïssa, on, a mitjan segle passat, L. Schläfli va tenir prou empenta com per a reflexionar sobre els políedres en espais de més de tres dimensions. En el proper paràgraf, quan parlem de *programació lineal*, assajarem de fer veure com hom pot anar a parar, de manera natural, a la consideració d'aquests objectes.

Keplers Weltgeheimnis (Bild 2)

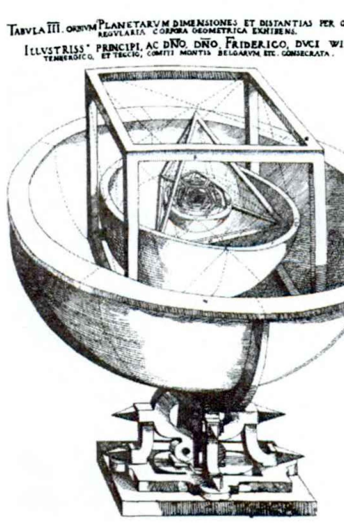


Figura 2. La visió del món de Kepler: Les sis esferes planetàries encaixades en els cinc cossos platònics. L'esfera exterior se sosté sobre el cub.

Un dels descobriments més impressionants de Schläfli va ser l'extensió de la fórmula d'Euler als políedres de dimensió d arbitrària. Ens diu que la suma alternada

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1}$$

és igual a zero si d és un nombre parell i igual a 2 si d és senar. Per $d = 2$ (polígons), això és evident, però l'autèntica bellesa d'aquesta fórmula, la descobrim quan passem a dimensions superiors.

Avui podem dir que L. Schläfli ha estat un dels més grans exploradors i descobridors i que, en silenci i sense ús de la força, ha entrat en una contrada en la qual mai ningú no havia estat abans: els espais de dimensió superior i els seus políedres convexos.

Programació lineal

Si el lector ens permet ara de donar un tomb pel camí de fora de les matemàtiques, voldríem parlar d'un problema que condueix, de manera natural, a la consideració de políedres de dimensió superior. La branca de les matemàtiques que s'ocupa dels problemes del tipus que descriurem ara s'anomena programació lineal. Considerem un problema de la vida quotidiana. Cada dia hem d'obtenir, a partir de la nostra alimentació, l'energia, la proteïna, el calci, etc., que necessitem, sense menjar més del necessari i mantenint el cost d'aquesta alimentació tan baix com sigui possible. Per tal de simplificar, suposem que ens alimentem només de llet i ous. 100 cm^3 de llet contenen 3,5 g de proteïna, 80 mg de calci i costen 30 PTA. Un ou conté 7 g de proteïna, 40 mg de calci i costa 50 PTA. Diàriament, un adult necessita uns 56 g de proteïna i uns 800 mg de calci i admetem que no podem digerir més de 2 litres de llet al dia ni més de 12 ous. Com fixaríem la nostra dieta de la manera més econòmica possible, tot i proporcionar-nos la proteïna i el calci que necessitem? Podem il·lustrar la situació amb un senzill diagrama.

Sigui x el consum diari de llet (en decilitres), sigui y el nombre d'ous consumits (figura 3). La condició de prendre prou proteïna es tradueix en la desigualtat $3{,}5x + 7y \geq 56$ i el calci ens dóna la desigualtat $80x + 40y \geq 800$. El cost de comprar x dl de llet i y ous és de $30x + 50y$ PTA.

A partir del diagrama podem veure fàcilment que a la solució òptima, $x = 8$ dl de llet i

$y = 4$ ous, s'hi arriba desplaçant la funció cost $K = 30x + 50y$ fins que toqui el domini ratllat de les solucions admissibles.

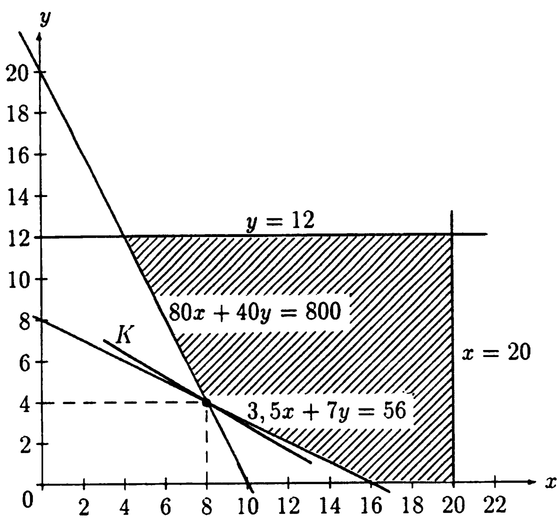


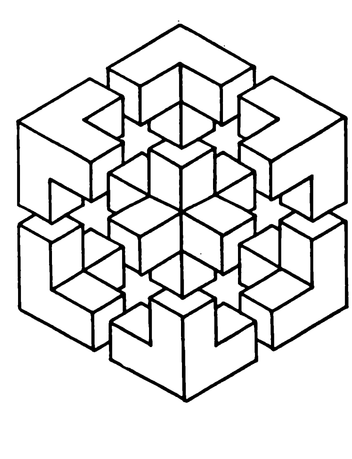
Figura 3. Programació lineal.

Quina relació hi ha entre aquest problema i els políedres convexos? Bé: el conjunt de les solucions admissibles del nostre problema és un políedre convex de dimensió dos. Si la nostra dieta constés de més de dos aliments, el domini de les solucions seria un políedre convex de dimensió superior, per exemple, de dimensió 10 si ens alimentéssim a partir de deu tipus d'aliment diferents. En el nostre problema de dimensió dos hem pogut trobar la solució amb un senzill dibuix. Potser també en el cas de dimensió tres podríem arribar a fer-ho així, però és clar que en el cas de més de tres variables, obtenir la solució per un dibuix és inviable. Malgrat això, s'ha pogut obtenir un *algorisme* que resol el problema en general. G. B. Dantzig és l'autèntic descobridor de l'anomenat *algorisme del símplex*. Tota una multitud de preguntes de l'economia i la tècnica, aparentment no relacionades les unes amb les altres, poden formular-se com a problemes de programació lineal i resoldre's amb l'ajuda del mètode del símplex. L'any 1975, L. V. Kantorovich i T. C. Koopmans van rebre el Premi Nobel d'economia pels seus treballs sobre programació lineal. El treball de Dantzig potser es va considerar com massa purament matemàtic i és ben sabut que no hi ha Premi Nobel de matemàtiques...

L'algorisme del símplex

Com funciona l'algorisme del símplex? Les cares del políedre convex que representa les solucions admissibles vénen donades per un sistema d'equacions lineals. La funció que cal minimitzar ve donada per un pla que cal desplaçar fins que toqui el políedre. Partint d'un vèrtex, l'algorisme busca un altre vèrtex contigu amb cost inferior. A cada vèrtex del políedre, li corresponen algunes de les equacions del sistema original. L'exercici consisteix, doncs, a resoldre successius sistemes d'equacions. La simplicitat de l'algorisme el fa apropiat per a la seva implementació a l'ordinador. Durant força temps, però, va restar oberta la pregunta de fins a quin punt era ràpid i eficient aquest algorisme. S'ha vist que, per a gairebé tots els problemes, és un algorisme molt bo, però V. Klee i G. J. Minty han construït exemples en què l'algorisme del símplex requereix un temps de càlcul molt llarg. Recentment s'ha estat mirant de trobar mètodes millors, com l'algorisme de Karmakar.

Tornem al primer dels nostres camins i convidem el lector a continuar el passeig. Considerem el reticle G_d format pels punts de coordenades enteres de l'espai euclidià de dimensió d.



Anomenarem *políedre reticular* un políedre convex, els vèrtex del qual siguin punts de G_d. Si P és un políedre reticular i λ és un dels nombres $0, 1, 2, 3, \ldots$, λP designarà el políedre que s'obté a partir de P fent una homotècia de centre l'origen de coordenades i raó λ. Designem per $f_P(\lambda)$ el nombre de punts del reticle que són a dintre de λP.

El polinomi de Ehrhart

En l'exemple representat en la figura 4 tenim $f_P(0) = 1$, $f_P(1) = 6$, $f_P(2) = 16$. És clar que $f_P(\lambda)$ creix amb λ, però, com ho fa? Fa més de trenta anys que E. Ehrhart, que aleshores era professor d'ensenyament secundari a Estrasburg, va descobrir que f_P és sempre un polinomi de grau d, de la forma

$$f_P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_d\lambda^d .$$

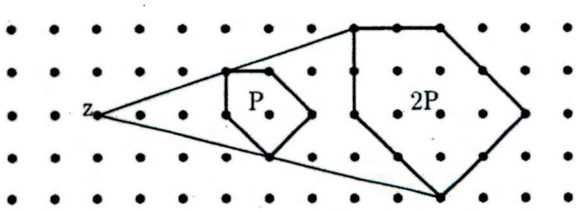
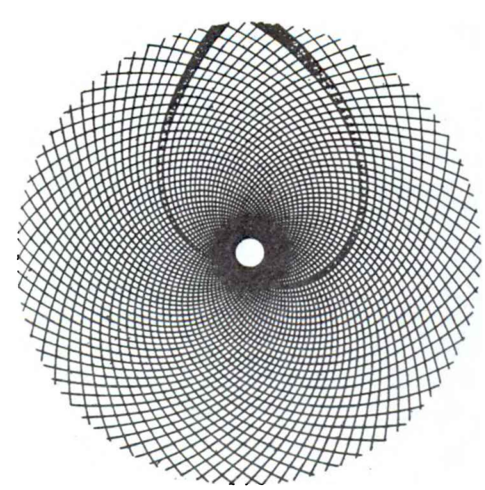


Figura 4. Polinomi d'Ehrhart.

És una fórmula simple, però l'autèntica aventura, el camí cap a l'interior de la matemàtica, va començar quan Ehrhart va interrogar-se sobre com determinar els coeficients $a_0, a_1, \ldots, a_d$. En el cas del nostre exemple veiem fàcilment que $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 2,5$, però, quina és la resposta per al cas $d = 3$, que és el cas de l'espai ordinari? Si λ és molt gran, el nombre de punts a λP s'acosta al volum del políedre λP. A partir d'aquí podem veure que a_3 ha de ser igual al volum de P. a_2 és una mena de superfície lateral de P i si prenem $\lambda = 0$ veiem que $a_0 = 1$. Quant val, però, a_1? Quant val en el cas del tetràedre, que deu ser tan senzill com sigui possible? J. Pommersheim ha trobat recentment la fórmula que podem veure en aquesta mateixa pàgina.

No intentarem pas de descriure totes les components d'aquesta fórmula, perquè això no ens serviria pas per entendre-la a fons. El que sí que direm és que cada políedre reticular de dimensió tres posseeix una misteriosa companya que ha restat invisible durant molt de temps: una *varietat tòrica* de dimensió sis $V(P)$. S'ha pogut veure que, aplicant els mètodes de la topologia a la varietat $V(P)$, pot obtenir-se informació sobre el políedre P, en particular sobre els coeficients $a_0, a_1, \ldots, a_d$ i també sobre la fórmula de J. Pommersheim.

Això és una magnífica recompensa per a nosaltres: la topologia, que fa ben bé dos-cents anys que va començar estudiant els políedres, ens permet avui entendre els políedres des d'un punt de vista totalment nou.



Peter Mani i Beat Jaggi són professors a l'Institut de Matemàtiques de la Universitat de Berna.

Nusos i enllaços

Els matemàtics utilitzen mots diversos per a designar les corbes de l'espai ordinari. Quan s'interessen per corbes tancades i per aquelles propietats que es conserven per deformacions, parlen de nusos. Un nus es fabrica prenent un fil elàstic, embolicant-lo d'alguna manera sobre ell mateix i unint, finalment, els seus dos extrems. El fil pot estirar-se o deformar-se, però entendrem que tenim sempre el mateix nus mentre no tallem el fil o el tornem a enganxar.

PIERRE DE LA HARPE

Es coneixen magnífiques representacions de nusos al llarg dels temps, per exemple a la cultura celta. Els primers treballs matemàtics sobre nusos es produeixen cap a l'any 1860 (1); trobem un interès creixent en els nusos durant els anys vint d'aquest segle (2) i s'observa una autèntica explosió de noves activitats en aquest camp a partir de 1984 (3).

Com havien fet molts d'altres abans, els matemàtics dibuixen també una gran multiplicitat de nusos. Els seus diagrames preferits són del tipus dels representats a les figures 1 i 2: són corbes tancades que es tallen elles mateixes en determinats punts, en els quals la pròpia representació ens indica quina és la part del nus que passa per dalt de l'altra. Per simplicitat, s'eliminen les cruïlles de més de dos segments i s'admet que els dos segments es creuen sempre fent un angle positiu (vegeu la figura 4). És també útil considerar diagrames que representin enllaços de diversos nusos, més o menys nuats els uns amb els altres. La figura 1 mostra dos diagrames de nusos; la figura 2 mostra un enllaç amb dues components. La figura 3 mostra una fotografia (4) de matèria cellular (DNA) la qual, de vegades, es presenta en la forma d'un cordó nuat; aquest fet és conegut dels biòlegs des de principi dels anys vuitanta.

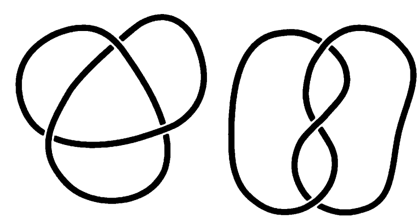


Figura 1. Dos diagrames de nusos.

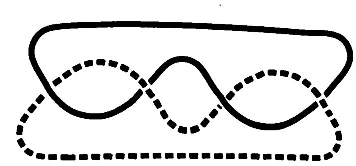


Figura 2. Un enllaç de dues components, una dibuixada amb traç continu i l'altra amb traç puntejat.

Un dels primers problemes que presenten aquests dibuixos pot formular-se de la següent manera: Quan és que dos diagrames d'aquests representen el mateix nus o enllaç? Que la pregunta no és pas trivial ens ho mostra la figura 1 (treta d'un llibre de H. Tietze (5)): A primer cop d'ull no és gens evident si els dos diagrames representen el mateix nus o no. Quin lector serà capaç de veure ràpidament que es tracta de nusos diferents?

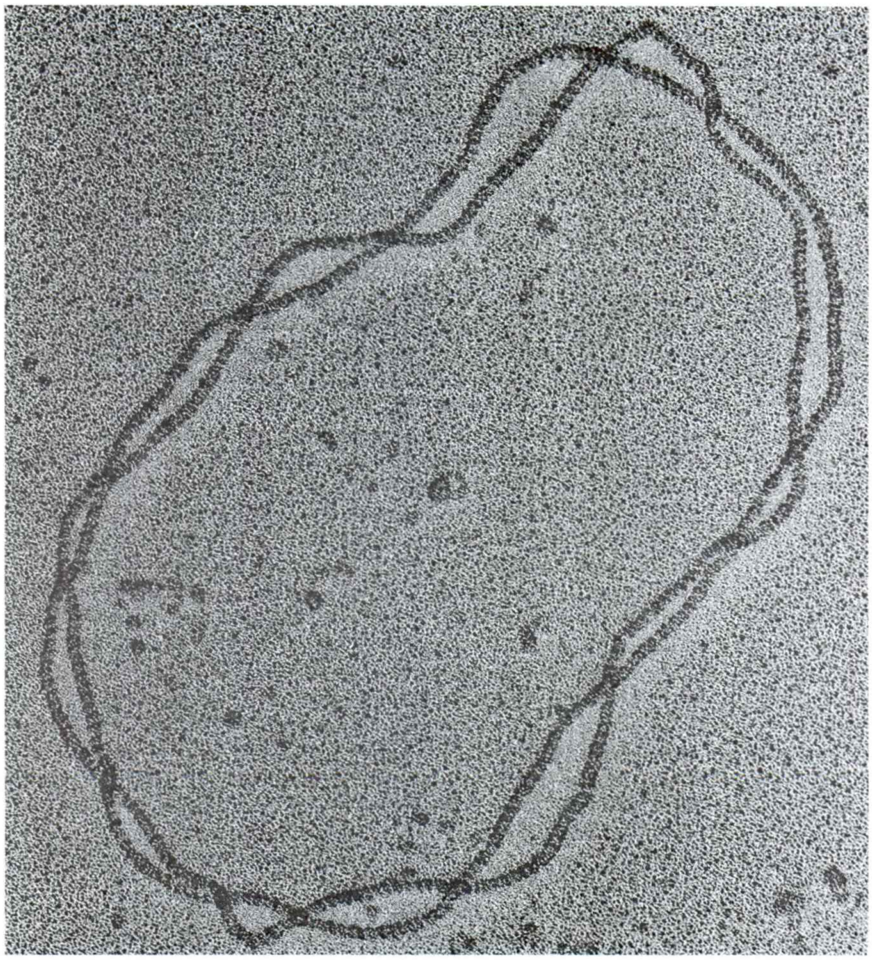


Figura 3. Una molècula de DNA nuada.

Acoloriment de diagrames i el número de Fox d'un nus

Un dels mètodes més simples per a distingir certs tipus de nusos és l'obtingut, pels volts del 1960, per Ralph Fox, de la Universitat de Princeton (6). Certament, no ha estat fins molt recentment que les idees de Fox han trobat el seu lloc com a casos particulars d'un mètode sistemàtic (vegeu les referències (7), (8) o (9)).

Aquest mètode té a veure amb l'acoloriment. Es pren una certa quantitat senar de colors, tres en el cas més simple, i s'acoloreixen, en el diagrama d'un nus o d'un enllaç, cada un dels segments continus. Es diu que aquest acoloriment compleix la regla de Fox (o que és un acoloriment de Fox) quan a cada cruïlla del diagrama coincideixen un o tres colors, però mai dos. (En el cas de 5, 7, ... colors, hi ha regles més complicades.) No és difícil de veure que quan passem d'un diagrama a un altre per mitjà d'una modificació local com les de la figura 5, és a dir, un moviment de Reidemeister de tipus I, II o III, el nombre total d'acoloriments de Fox no canvia. Però cada deformació d'un diagrama d'un nus es pot descompondre en una successió de moviments d'aquests tipus (10), com pot veure's mitjançant una ordenació dels fils, com es fa a la figura 6. D'aquí se segueix que el número de Fox (és a dir, el nombre d'acoloriments que compleixen la regla de Fox) no depèn del diagrama considerat, sinó que només depèn del nus representat.

Així, per exemple, els dos diagrames de la figura 7 no representen pas el mateix nus: el primer nus (anomenat *nus trèvol*) admet nou acoloriments de Fox; per contra, el segon nus (anomenat *nus vuit*) n'admet només tres, cada un dels quals només utilitza un sol color. De la mateixa manera, veiem que la figura 8 representa dos enllaços diferents: mentre que el primer enllaç admet només els acoloriments amb un únic color, el segon admet un acoloriment amb tres colors.

La teoria de nusos i el formalisme de la física estadística

Cap a finals dels anys vuitanta els matemàtics van generalitzar aquest mètode de l'acoloriment. La idea els va arribar provinent de models de la física teòrica que, inicialment, havien servit per a l'estudi dels materials ferromagnètics com ara el ferro, el cobalt o el níquel. Aquests metalls presenten la remarcable propietat que, si s'escalfen per sobre d'una certa temperatura ben determinada, deixen de ser magnètics. La comprensió dels mecanismes microscòpics responsables d'aquest comportament és un autèntic repte per a la física.

Els primers intents de solució són els d'Ernst Ising, que va ocupar-se d'aquest problema el 1925 en la seva tesi doctoral, dirigida per Wilhelm Lenz d'Hamburg. És força curiós que l'èxit immediat d'aquesta tesi va ser força modest, fins al punt que el seu autor va haver de canviar d'activitat. Durant la guerra va sobreviure amb moltes dificultats, i va perdre tot contacte amb la recerca. Va quedar, doncs, ben sorprès quan, el 1947, després de la seva arribada als Estats Units, va trobar-se convertit en un home famós. Cal tenir present que, mentrestant, algunes de les seves idees havien estat represes i havien conduït a desenvolupaments espectaculars dintre de la física teòrica (11).

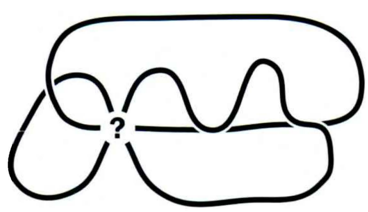


Figura 4. Un diagrama no acceptable.

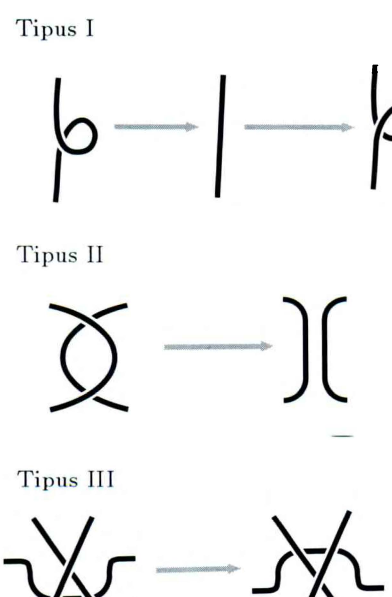


Figura 5. Els tres moviments de Reidemeister.

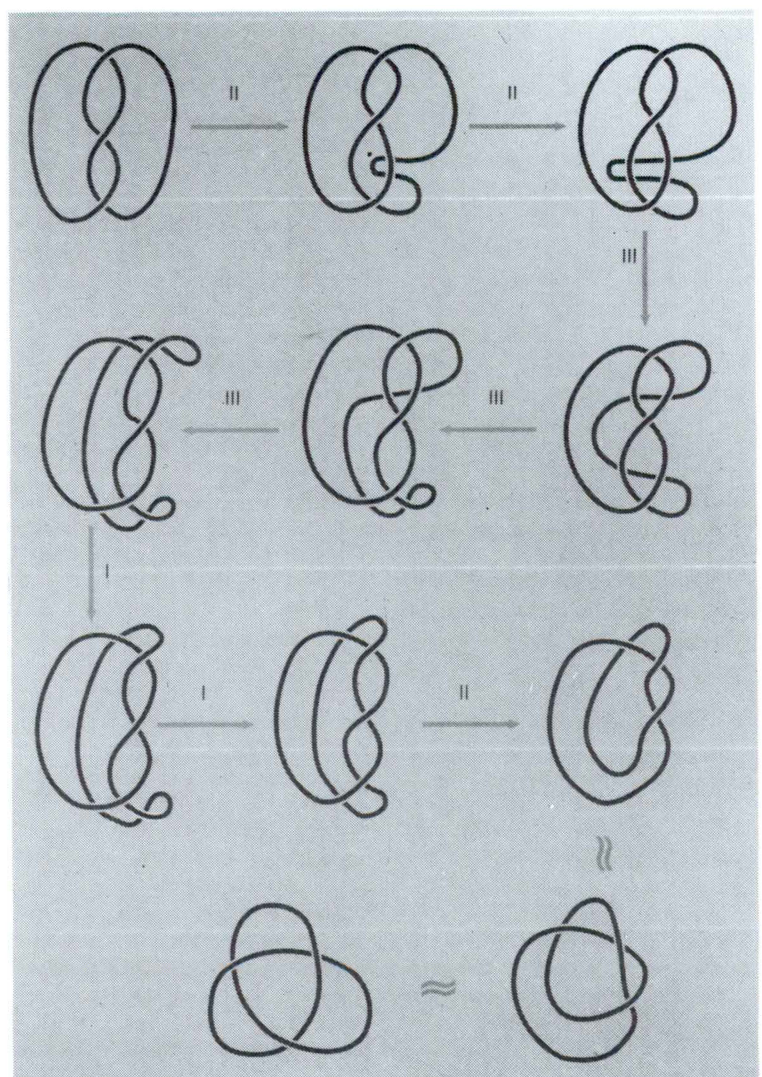


Figura 6. Seqüència de moviments de Reidemeister entre els diagrames de la figura 1.

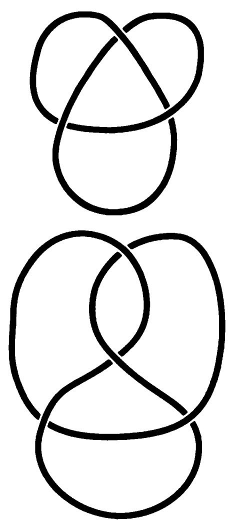


Figura 7. El nus trèvol i el nus vuit.

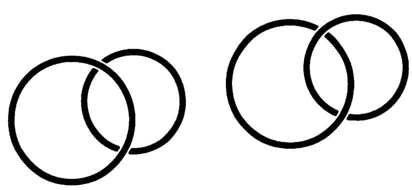


Figura 8. Dos enllaços de dues components cadascun.

En el model d'Ising es representa un cristall ferromagnètic com un reticle cúbic. Força més entenedor és estudiar el model anàleg en dues dimensions: un gran rectangle format per petits quadrats, que representa un cristall tan prim que en podem negligir el gruix. Cada aresta de la quadrícula té un àtom del cristall; en cada vèrtex es troben quatre arestes; aquest vèrtex representa la interacció dels quatre àtoms corresponents. L'estat del cristall es descriu donant un estat local (anomenat de vegades *spin* o *color*) per cada aresta-àtom. Per cada un d'aquests estats, cada vèrtex posseeix una energia local que depèn dels estats dels quatre àtoms del seu entorn; hi ha tants models d'Ising com maneres de fixar aquesta dependència. El mateix estat posseeix una energia donada per la suma (o, també, el producte) de les contribucions de cada vèrtex.

Aquesta investigació és de mena estadística i considera valors mitjans de tots els estats possibles. En els casos favorables i per a cristalls rectangulars prou grans, el resultat dels càlculs depèn, de manera notable, de la temperatura. Aquests càlculs fan més entenedor el fascinant comportament dels metalls ferromagnètics.

La regularitat d'un reticle és el que fa possible de dur els càlculs fins al final. De tota manera, si relaxem l'exigència sobre el resultat final, el formalisme del model d'Ising es pot aplicar fàcilment a situacions més generals: Per exemple, podem aplicar aquest formalisme a qualsevol diagrama format de punts, que anomenarem ***vèrtex***, i els quals s'uneixen per segments de corbes, anomenats *arestes*, de manera que en cada vèrtex coincideixin exactament quatre arestes. És a dir, podem aplicar-ho als diagrames dels enllaços (a les cruïlles, comptem el segment del damunt com a dues arestes, encara que sigui un traç continu).

En el cas concret dels models de Fox de tres colors, un estat del diagrama ve especificat per l'acoloriment de les seves arestes. A cada vèrtex, se li atorga un coeficient d'energia que té el valor 1 si es compleix la regla de Fox (com a l'exemple de la figura 9), i té el valor 0 en cas contrari (figura 10). Els casos en què el coeficient d'un vèrtex és 0 són: 1) el segment del damunt té colors diferents a cada costat de la cruïlla; 2) el segment del damunt té un únic color, però el de sota té aquest mateix color en un costat i un de diferent en l'altre; 3) el segment del damunt té un únic color i el de sota en té un de diferent als dos costats de la cruïlla. L'energia total de l'estat és el producte dels coeficients: 1 si es compleix la regla de Fox arreu i 0 en cas contrari. La suma de les energies de tots els estats és exactament el número de Fox que hem definit abans.

Estrictament parlant, d'això que hem dit no es dedueix pas cap aplicació dels resultats de la física teòrica a la teoria de nusos, però sí que tenim una mostra d'un formalisme fructífer, d'un exemple típic de treball interdisciplinari.

Desenvolupaments actuals

Els físics teòrics que estudien els cristalls, especialment els cristalls ferromagnètics, són, sovint, els mateixos que s'interessen per la teoria quàntica de camps, és a dir, la interacció de camps electromagnètics i nuclears i, també, camps gravitatoris. El motiu d'això és el següent: aquestes interaccions s'estenen per l'espai, que nosaltres considerem com un continu. Aquest aspecte continu de l'espai, però, fa que els càlculs siguin, en l'estat actual de les matemàtiques, inassolibles. Això ens duu a considerar el cas en què l'espai estigués format pels vèrtexs d'un reticle, imaginant que la distància entre vèrtexs contigus tendeix a zero. És a dir, imaginem l'espai com el límit d'una mena de reticle cristal·lí. Aquest punt de vista ha demostrat ser força útil en la teoria de camps. A partir d'aquí, en aquests darrers anys s'ha produït un múltiple intercanvi d'idees entre la teoria de camps, la física de les substàncies ferromagnètiques i la teoria de nusos, per citar només aquests tres camps de la ciència.

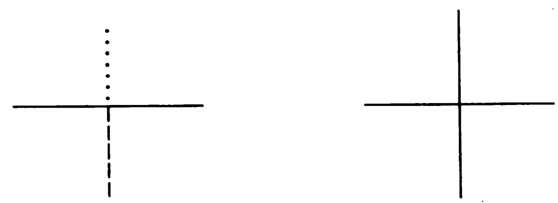


Figura 9. Coloracions a l'entorn d'un vèrtex que compleixen la regla de Fox.

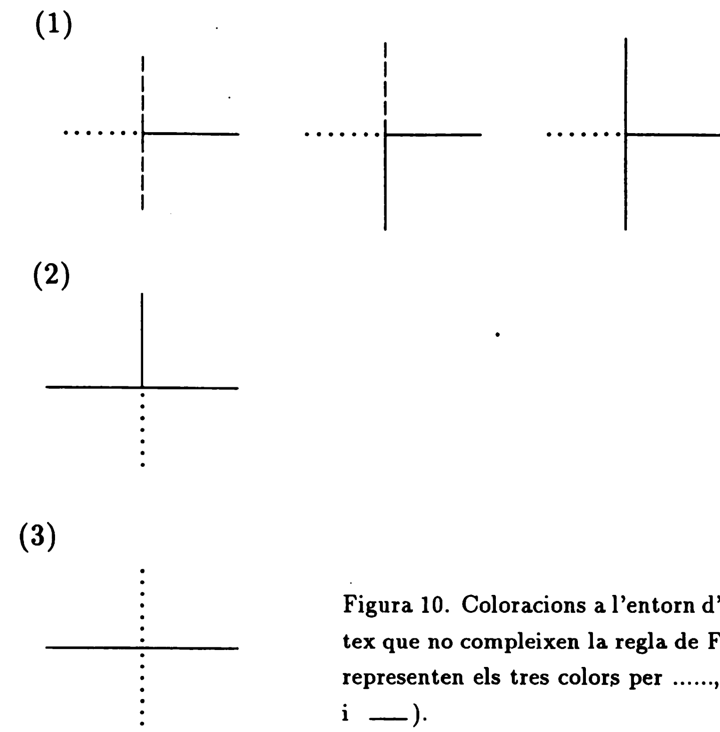


Figura 10. Coloracions a l'entorn d'un vèrtex que no compleixen la regla de Fox. (Es representen els tres colors per ......, - - - - i ——).

Referències

1. P.G. Tait, *On Knots*, Trans. Roy. Soc. Edimburgh (1867).
2. J.W. Alexander, *Some Problems in Topology*, Verhandl. Internat. Mathematiker-Kongress Zürich 1 (1932), 249–257.
3. V.F.R. Jones, *A Polynomial Invariant for Knots via von Neumann Algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 103–111.
4. A. Stasiak, *Photographie d'une molécule d'*ADN *nouée*, Laboratoire d'Analyse Ultrastructurale, Université de Lausanne.
5. H. Tietze, *Ein Kapitel Topologie*, Zur Einführung in die Lehre von den verknoteten Linien. Teubner, 1942.
6. R.H. Crowell und R.H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Ginn and Co., 1963.
7. L. Kauffmann, *State Models and the Jones Polynomial*, Topology 26 (1987), 395–407.
8. V.F.R. Jones, *On Knot Invariants Related to some Statistical Mechanical Models*, Pacific Journal Math. 137 (1989), 311–334.
9. P. de la Harpe und V.F.R. Jones, *Graph Invariants Related to Statistical Mechanical Models: Examples and Problems*, J. Comb. theory Ser. B 57 (1993), 207–217.
10. K. Reidemeister, *Elementare Begründung der Knotentheorie*, Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1926), 24–32.
11. S.G. Brush, *History of the Lenz-Ising Model*, Reviews of Modern Physics 39–4 (1967), 883–893.

Pierre de la Harpe és professor a la secció de matemàtiques de la Universitat de Ginebra.

Quins nombres depassen el miler de trilions?

Els resultats de la teoria de nombres són d'aquells resultats matemàtics dels quals, per la seva espectacularitat, els diaris parlen arreu. L'exemple més recent és l'anunci, fet per Andrew Wiles el 23 de juny del 1993 al Newton Institut de Cambridge, de la demostració de la conjectura de Fermat. Des de fa més de tres-cents cinquanta anys, aquest problema porta enfeinats un gran nombre de matemàtics. Què se cerca en teoria de nombres i a quin tipus de conclusions s'espera arribar? Els seus resultats, profunds o no, es troben únicament en referències especialitzades?

ANDREAS BENDER

Hauríem de començar per la primera matèria d'aquests problemes: d'entrada, acceptem solament el conjunt dels nombres naturals $1, 2, 3, \ldots$ i les seves operacions d'addició i de multiplicació. Malgrat que fem ara ampliacions més o menys temeràries d'aquest conjunt, les nostres reflexions sempre ens hi retornaran.

El primer problema se'ns presenta quan volem invertir l'addició: $3 - 5$ no és cap *nombre natural.* Per tal de resoldre'l, ampliem el nostre conjunt cap als nombres negatius $-1, -2, -3, \ldots$. Iterarem processos d'aquesta mena; és a dir, ampliarem un conjunt de nombres a fi de poder portar a terme una operació, sense restriccions, amb tots els seus elements.

La divisió de tots els nombres enters, llevat del zero, ens condueix al conjunt dels *nombres racionals.* Però en l'antiguitat ja se sabia que, per exemple, la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 1 no és cap nombre racional. Per tant, si sobre una recta assenyalem un punt com a origen, tenim que els nombres racionals no descriuen tots els seus punts.

El pas següent se'ns imposa quan volem extreure arrels quadrades de *nombres reals* negatius: $\sqrt{-1}$ no és cap nombre real. Podem interpretar els nombres complexos, indispensables per a tal fi, com a parells ordenats de nombres reals. Però fóra feixuc explicar aquí com s'hi opera. Aquestes dues darreres ampliacions permeten, per primera vegada, poder portar a terme sèries infinites d'operacions. D'altra banda, tots els intents d'ordenar els nombres complexos porten a contradicció; en conseqüència, no són cap conjunt ordenable.

L'algorisme d'Euclides

Si volem prosseguir en aquesta direcció, tot mantenint el sentit de les definicions, només podem fer dos passos més: els de les extensions quaterniòniques i octaniòniques. Aquest és un resultat difícil, que amb prou feines fa cinquanta anys que es coneix. A partir de la teoria de nombres ens hem anat endinsant en l'àlgebra i hem trobat un dels molts exemples que fan palesa l'estreta relació existent entre aquesta teoria i altres dominis de la matemàtica.

Tornem a la segona de les nostres ampliacions: la divisió. Considerem les dues equacions: $3x = 12$ y $3x = 13$. Ambdues són resolubles en el conjunt dels nombres racionals mitjançant una divisió. Però si volem, de fet, solucions enteres, derivem cap al concepte de divisibilitat. La primera equació té la solució $x = 4$, mentre que la segona manca de solucions en els enters, car 13 no és divisible per 3. Prenguem una altra indeterminada y i considerem una equació com $2x + 6y = 22$. Podem donar a x un valor arbitrari en el conjunt dels nombres racionals i calcular y per mitjà d'una resta i una divisió. Per raons de divisibilitat, no sempre obtenim solucions enteres en aquests tipus d'equacions. Aquest és el cas de $2x + 6y = 23$; siguin quins siguin els valors que donem a x i a y, $2x + 6y$ és divisible per 2, mentre que 23 no ho és. Per tant, l'equació no és resoluble en els enters. Si no volem temptejar per trobar les solucions de la primera de les equacions, podem fer ús d'un algoritme: l'algoritme d'Euclides, una de les conquestes de l'antiguitat en teoria de nombres.

Les equacions que hem considerat són de grau 1. Quan es troben indeterminades elevades al quadrat, com per exemple $2x^2 + 6y^2 = 22$, parlem d'equacions de grau 2. Si ampliem els nombres racionals amb totes les arrels quadrades tant de nombres positius com de nombres negatius, la resolució d'aquestes equacions és, de fet, trivial. Certament, la pregunta sobre la seva resolubilitat esdevé interessant quan només admetem solucions racionals. La teoria necessària per a tal fi es conformà a principis d'aquest segle; permet, per exemple, decidir en tots els casos la resolubilitat d'una equació donada.

L'equació de Fermat

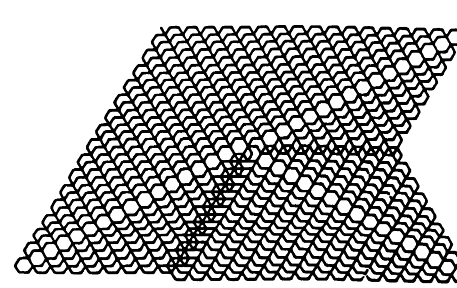
Considererem les equacions de tercer grau en dues indeterminades $y^2 = x^3 + ax + b$, on a i b són nombres enters. Aquí ens trobem a les portes de la recerca. La teoria d'aquestes equacions resta força lluny de ser compresa. Per exemple, encara no es disposa d'un mètode general per decidir si són o no resolubles en els racionals.

Entre aquestes equacions i la conjectura de Fermat esmentada al començament existeix una estreta relació. L'any 1637, el jurista i matemàtic francès Pierre de Fermat anotà la següent sospita: l'equació $x^n + y^n = 1$ no té solucions racionals per a cap exponent n més gran que 2 (recordem que x^n representa el producte de n vegades el nombre x). Tocant a això, cal que x i y siguin diferents de zero. Per a molts valors de n particulars s'ha pogut demostrar que l'equació no té cap solució. Així, per exemple, Leonhard Euler provà que no existeixen parelles de racionals (x, y) de manera que $x^3 + y^3 = 1$. El problema de Fermat motivà l'aprofundiment i l'evolució de teories senceres. Tot just el fet de poder reconèixer els casos on la «solució» és relativament senzilla, ja donà un impuls decisiu al desenvolupament de la teoria algebraica de nombres.

El 1986, Gerhard Frey d'Alemanya i Ken Ribet dels EUA mostraren com aquest problema es pot reduir a una qüestió sobre unes equacions de grau 3. El seu treball posa de manifest com, a partir d'una solució de l'equació de Fermat, es podria construir una equació no modular de grau 3. Aquest fet entra en contradicció amb la hipòtesi que totes les equacions de grau 3 són modulars. Si es pogués provar aquesta conjectura, el problema de Fermat quedaria resolt. El manuscrit, inèdit, d'Andrew Wiles versa precisament sobre aquest fet. Quan cloem la nostra redacció, encara no s'ha fet públic si la llacuna de la demostració es deixarà cloure aviat.

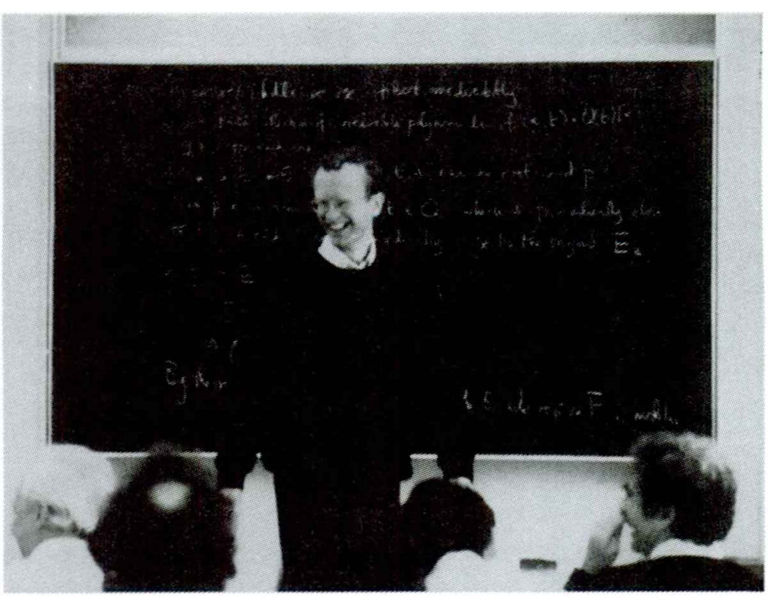
Els ordinadors són molt útils en teoria de nombres

Diofant d'Alexandria va ser un dels primers en cercar sistemàticament solucions racionals i solucions enteres d'equacions. D'ell prenen el nom les equacions de les quals únicament se cerquen aquest tipus de solucions. Encara que aquest sigui un dels temes centrals de la teoria de nombres, ara volem considerar quelcom completament diferent, a fi de donar una idea de la diversitat de preguntes interessants que s'hi plantegen. Prenguem un nombre natural x arbitrari i apliquem-li la regla següent: si és parell li assignem $x/2$; si és senar li fem correspondre $3x+1$. Atès que ambdós resultats són novament nombres naturals, podem iterar el procés i obtenir, per a cada x, una successió de longitud tan gran com vulguem. Basta una calculadora de butxaca per intuir ràpidament, a partir d'uns quants exemples, preguntes centrals sobre aquesta successió que encara avui



resten obertes. Tocant a això, s'aprèn de pressa a apreciar els avantatges d'una calculadora programable. De fet, foren els primers llistats de resultats d'ordinador els que feren plausibles les conjectures. Els ordinadors són molt útils en teoria de nombres a l'hora de calcular dades de manera sistemàtica. Però, només amb el problema $3x+1$, ja ens adonem que els coneixements obtinguts d'aquesta manera tenen les seves limitacions. Els ordinadors poden verificar solament per a un nombre finit de valors inicials que la successió sempre assoleix el valor 1. Això no ens lliura de la incertesa de si el següent valor inicial satisfà la propietat i, en conseqüència, no poden proporcionar mai una demostració general.

Per què s'investiguen qüestions de teoria de nombres? Per què se cerquen solucions enteres o racionals d'equacions quan una ampliació senzilla del domini dels nombres basta per a conduir-nos a una solució també senzilla? La resposta dels filòsofs podria ser: «I per què no?» La resposta dels experts es decantaria per dir que en moltes disciplines, i també en la quotidianitat, únicament s'hi valen els enters i que a ells s'han de referir els càlculs, encara que els estadístics ens parlin de famílies que tenen, de mitjana, dues criatures i mitja. La teoria de nombres troba aplicacions en disciplines com la física, la teoria de la informació i els gràfics per ordinadors. A fi d'entendre'n les motivacions, potser ens ajudaria escoltar alguna vegada un grup de sexagenaris discutint animadament sobre quins nombres són més grans que un miler de trilions. Hi ha persones sensibles a la fascinació dels nombres. Es queden bocabadades davant de l'obra dels seus avantpassats i, d'una manera especial, davant del munt de misteris arcans que encara resten per comprendre. Espero no perdre mai aquesta capacitat d'embadalir-me.



Sembla que el matemàtic britànic Andrew Wiles ha desenvolupat una demostració formal del darrer teorema de Fermat.

Andreas Bender és un enginyer diplomat per l'ETH. Estudià matemàtiques primerament a la Universitat de Zuric. Actualment treballa en una tesi en teoria de nombres a la Universitat de Cambridge, Anglaterra.

Codis correctors d'errors: de les travesses de futbol als viatges espacials

Com es pot aconseguir una transmissió de dades, per exemple en telecomunicacions, amb la màxima fidelitat? Com es poden emmagatzemar per molt de temps dades fixes en un ordinador sense que les minúscules traces del material radioactiu de la màquina alterin el contingut de les cel·les de memòria? Incorporant codis correctors d'errors.

FRANÇOIS SIGRIST

La majoria dels jugadors empedernits de travesses de futbol es coneixen aquesta taula 1 de memòria:

x	x	x	1	1	1	2	2	2
x	1	2	x	1	2	x	1	2
x	1	2	1	2	x	2	x	1
x	1	2	2	x	1	1	2	x

Taula 1: Travessa amb 4 partits.

Aquesta llista de 9 pronòstics per a 4 partits és coneguda perquè garanteix almenys 3 encerts. En altres paraules: sigui quin sigui el resultat dels 4 partits, hi ha una columna de la llista amb 3 o 4 signes correctes.

El codi de les travesses

Una manera carregosa de comprovar aquesta remarcable propietat consisteix a mirar un per un els $3^4 = 81$ possibles resultats que es poden donar en 4 partits. També podem procedir a l'inrevés: cada columna de la nostra llista té un domini d'influència sobre 9 diferents resultats: la pròpia columna (4 encerts) i les 8 possibilitats en què la columna té 3 encerts. Com que $9 \times 9 = 81$, cal verificar que aquests dominis d'influència són tots disjunts. Ara, si dos d'aquests dominis d'influència tinguessin intersecció, hi hauria dues columnes de la nostra llista amb dos o més signes en comú, i aquest no és el cas, com es comprova ràpidament.

Il·lustrem a continuació alguns termes tècnics amb l'exemple de la taula de les travesses: les 9 columnes (composta cadascuna de 4 elements) són les paraules d'un codi de longitud 4. Els signes $\{x,1,2\}$ constitueixen l'alfabet del codi. La distància entre dues paraules és el nombre de posicions en què difereixen les paraules. La distància del codi, la definim com la mínima distància entre dues paraules diferents. En el codi de les travesses la distància és 3.

Veiem ara com el nostre codi de les travesses pot corregir errors: si escrivint una paraula del codi cometem 1 error (per exemple, xxx1 en comptes de xxxx), aleshores la paraula falsa és a distància 1 de la correcta i a distància almenys 2 de totes les altres paraules del codi. Per tant, la paraula correcta és la paraula del codi que està més a prop de la paraula escrita. Aquest mètode es pot aplicar a qualsevol codi de distància 3. Aquests codis corregeixen automàticament 1 error: si una paraula té un signe equivocat no pertany al codi i la corregim considerant la paraula del codi que és més a prop seu!

Deixem ara el futbol de banda i apliquem la propietat correctora d'un codi a les telecomunicacions. Imaginem un lèxic format per 9 paraules diferents, cadascuna integrada per dues xifres de l'alfabet $\{x,1,2\}$. Per exemple, podem triar el principi de les 9 paraules de 4 xifres del codi de les travesses: $\{xx,x1,x2,1x,11,12,2x,21,22\}$. (Si substituïm x per 0 ens adonem que tenim els números del 0 al 8 escrits en base 3. Així doncs, les columnes de la taula 1 vénen numerades per les seves dues primeres xifres.) Suposem que aquestes paraules han de ser trameses de manera no fidel, amb una probabilitat p d'error en la transmissió de cada signe; per exemple, $p = 0,01$ (l'1 %). Per terme mitjà, doncs, 1 signe de cada 100 serà incorrectament tramès. Tot i així, reduïm la taxa de transmissió a la meitat, és a dir, disposem de quatre xifres per a la transmissió de cada paraula de dues xifres, amb el propòsit d'utilitzar les dues xifres addicionals per reduir encara més la possibilitat d'error en la transmissió.

Una primera idea és repetir cada paraula; per exemple, enviar x1x1 en comptes de x1. Si en la recepció ens arriba una paraula amb dues meitats iguals és molt improbable que s'hagi comès un error. Si les dues meitats de la paraula són diferents, hem estat de pega, i necessitem un mètode per a reconstruir la paraula correcta. Es pot provar que tots els mètodes són igual de bons (i igual de dolents) que el d'escollir la primera meitat de la paraula rebuda. La probabilitat d'una descodificació correcta amb aquest procediment és per tant $(1-p)^2 = 0,9801$; és a dir, 1 paraula de cada 50, per terme mitjà, serà incorrectament interpretada.

Hi ha una altra idea molt més enginyosa: les nostres paraules són el principi de les 9 paraules de 4 xifres del codi de les travesses. Doncs bé, enviem cada vegada la paraula sencera del codi; per exemple, x111 en comptes de x1. Per a la recepció apliquem la següent regla: busquem a la taula una paraula a distància mínima de la paraula rebuda i prenem les seves dues primeres xifres. Si s'han comès 0 o 1 errors en la transmissió, el resultat que obtenim és el correcte ja que el codi corregeix 1 error! La probabilitat d'una descodificació correcta amb aquest mètode, ens la dóna la fórmula: $(1-p)^4 + 4p(1-p)^3 = 0,9994$. Ara, per tant, només 1 de cada 1.689 paraules, de mitjana seran incorrectament interpretades. Una millora notable del rendiment!

Mètodes anàlegs a aquest, amb l'alfabet $\{0,1\}$, han comportat canvis radicals en les tècniques de transmissió de dades, en particular en les telecomunicacions (transmissió digital). Una altra aplicació, potser fins i tot més important, fa referència a la protecció de dades fixes dels ordinadors. En cada ordinador cal emmagatzemar una gran quantitat de dades a les cel·les de memòria. Pràcticament tots els materials tenen traces ínfimes d'urani o tori radioactius. La radiació alfa corresponent pot alterar el contingut de les cel·les de memòria d'un ordinador. Suposem, per exemple, que es produeix una alteració de cel·la de memòria cada milió d'anys. Pels ordinadors actuals, proveïts de quantitats ingents de cel·les de memòria, això significa un període de seguretat, com a molt, d'algunes setmanes. Si incorporem codis correctors d'errors, els períodes de seguretat s'allarguen considerablement. Com a conseqüència de la ben coneguda *paradoxa de l'aniversari*, els errors en una sola posició són automàticament corregits. Per més informació sobre aquest punt es pot consultar un excel·lent article de McEliece (*Scientific American*, gener 1985). Avui en dia, pràcticament totes les dades són regularment posades al dia i els ordinadors estan fortament protegits dels errors de magatzematge.

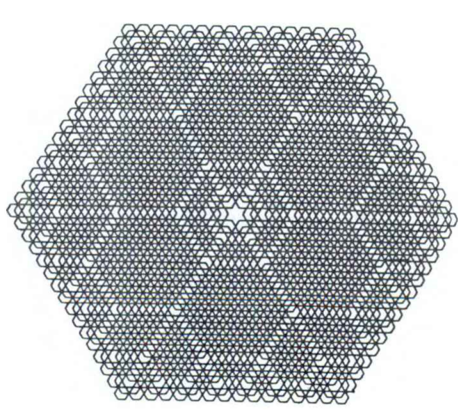
Codis de Hamming

Els codis correctors d'errors van ser descoberts deprés de la segona guerra mundial. Aquí teniu la història: situem-nos als laboratoris Bell en els anys 1946-1947: en el seu temps lliure, el matemàtic Richard Hamming experimenta amb una d'aquelles famoses computadores monstruoses, farcides de cables connectors i lampadetes, que varen ser desenvolupades durant la segona guerra mundial. Tot i que la màquina no té cap codi corrector d'errors (no n'hi havia encara!), té un sistema molt elemental d'alerta que avisa quan es comet un error encenent una bombeta. Cal desconnectar aleshores la màquina i tornar a carregar les dades. El cap de setmana, el temps que Hamming pot utilitzar la màquina, els tècnics que fan aquesta feina no hi són i el nostre matemàtic ha d'interrompre l'experiment cada cop que té una pana, i esperar fins que tornin els tècnics. Es proposa aleshores la tasca de desenvolupar un codi automàtic per corregir errors. Amb una mica d'àlgebra lineal aconsegueix desenvolupar un sistema de *travesses* sobre l'alfabet $\{0,1\}$ amb 16 columnes de 7 partits (vegeu la taula 2). El sistema garanteix 6 encerts. La comparació amb el codi de les travesses ens fa veure com cal utilitzar el sistema. Les paraules a transmetre són les formades per les primeres 4 xifres de cada columna. Per cert, noteu que representen els números del 0 al 15 en base 2 (anàlogament al codi de les travesses), de manera que també serveixen per a numerar les columnes. Per a la transmissió d'una paraula enviem la columna sencera, i quan es rep es consideren les 4 primeres xifres de la columna del codi que és més a prop de la columna rebuda. Aquest mètode té una taxa de transmissió lleugerament superior a la del codi de les travesses: passem de 4 a 7 xifres en comptes de doblar!

0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1

Taula 2: Codi de Hamming de longitud 7.

El mètode de Hamming permet fabricar molts altres codis. Entre ells, un de longitud 15, que transmet 11 xifres, és utilitzat per l'exèrcit nord-americà. Per a un alfabet de 3 xifres (apte per als partidaris de les travesses) hi ha, fins i tot, un codi de longitud 13 (el nombre de partits de la travessa suïssa) que garanteix 12 encerts. Per desgràcia, aquest codi té $3^{10} = 59.049$ columnes!



Codis de Golay

Els codis de Hamming només poden corregir 1 error per paràmetre. El 1949 l'enginyer suís Marcel Golay, que havia treballat als Estats Units com a expert en radars, va construir dos codis remarcables que permeten corregir uns quants errors per paraula. El primer codi utilitza un alfabet de 3 xifres i no té cap aplicació practica en les telecomunicacions; no obstant això, per als matemàtics és, encara avui dia, un objecte molt interessant. (De fet, la descoberta original del codi és deguda al finès Juhari Virtakallio, que el va descriure, el 1947, en la revista finesa de futbol *Vejkkaja*.) El segon codi de Golay, amb alfabet $\{0, 1\}$, és extraordinàriament important, tant a efectes pràctics com teòrics. Consta de $2^{12} = 4.096$ paraules de longitud 23 i pot corregir 3 errors per paraula.

Tots tenim a la memòria la imatge de Júpiter que va poder ser enregistrada amb el sonar del *Voyager*. El sonar va ser programat amb un codi de Golay, per tal d'aconseguir una transmissió extremadament segura de les dades.

Per acabar, volem mencionar encara una altra aplicació del codi de Golay en un àmbit completament diferent. Fa aproximadament quinze anys es van fer enormes progressos en la classificació dels grups finits simples (els grups són estructures molt importants, que apareixen en molts vessants de la matemàtica). A més de les diverses menes de grups simples clàssics, hi ha 26 grups esporàdics. La majoria d'aquests grups es van poder realitzar explícitament per primera vegada amb l'ajuda del codi de Golay, i en connexió amb empaquetaments d'esferes en espais de dimensió 24. La teoria necessària per a la completa classificació dels grups finits simples és el resultat del treball conjunt, ingent i sense parió, de molts matemàtics. Omple uns quants milers de pàgines i es calcula que no hi ha cap especialista capaç de dominar-la totalment.

L'exemple dels codis de Golay, amb les seves aplicacions en diversos dominis, mostra com pot arribar a ser d'inabastable la recerca en matemàtiques.

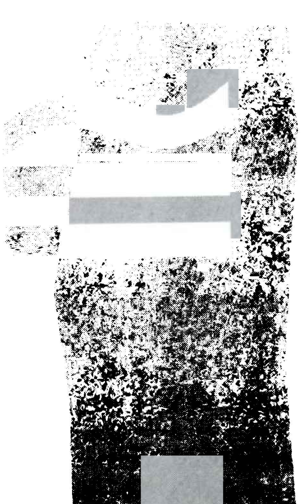
François Sigrist és professor a la Universitat de Neuchâtel.

És possible amb l'atzar calcular millor i més ràpid?

A l'escola els nens ja aprenen algorismes. Per exemple, se'ls ensenya com multiplicar nombres grans a partir de les taules de multiplicar. És clar que, de vegades, involuntària i casualment, s'equivoquen. Els algorismes estocàstics fan això intencionadament. Cadascuna de les seves etapes de càlcul es planteja detalladament però s'executa aleatòriament. Per alguns problemes els resultats són millors que els obtinguts utilitzant coneguts algorismes deterministes.

ERWIN BOLTHAUSEN

Un algorisme és un procediment de càlcul en què totes i cadascuna de les etapes estan especificades de forma molt precisa. Seguint al peu de la lletra les instruccions i, sense necessitat de posar-hi gens de fantasia, podem obtenir el resultat final a partir de les dades inicials. D'entre els més importants i ben coneguts des de fa molt de temps cal esmentar *l'algorisme de Gauss*, per a resoldre sistemes d'equacions lineals, i *el de Newton*, per a resoldre equacions. Ambdós es troben implementats en les millors calculadores de butxaca.



Un dels objectius més importants de la matemàtica aplicada és el desenvolupament i anàlisi d'algorismes. Aquests en són alguns exemples: algorismes ràpids i eficients per a equacions en derivades parcials permeten de fer una simulació amb ordinador del comportament aerodinàmic dels avions. La tomografia amb ordinador fóra impossible sense una transformació algorísmica de les dades d'entrada. L'actual *boom* en la recerca sobre xarxes de neurones fou produït, essencialment, pel redescobriment de Rumelhart el 1985 de l'anomenat *algorisme de propagació inversa.*

La virtut més gran d'un algorisme

Què té a veure la teoria matemàtica de l'atzar, la teoria de la probabilitat, amb els algorismes? Molt sovint l'atzar juga un paper no gaire desitjat, per exemple, en la forma d'errors causals que, perversament, es poden introduir en el decurs dels càlculs. Els escolars ho saben prou bé. Ordinadors altament eficients tenen també aquests tipus de problemes. Les seves components, per exemple la memòria, són tan diminutes que poden ser pertorbades per les febles i omnipresents radiacions radioactives. Hom pot protegir-se d'aquests problemes repetint els càlculs diverses vegades o utilitzant mètodes més sofisticats, com els codis correctors d'errors. En els darrers anys s'han aconseguit grans èxits en el desenvolupament de tals codis. De manera sorprenent, algunes teories matemàtiques abstractes, com la geometria algebraica, juguen aquí un paper important.

Mentre que aquests codis serveixen per a eliminar pertorbacions aleatòries indesitjades, l'atzar, de manera volguda i sistemàtica, s'incorpora en la forma d'algorismes estocàstics: determinats passos no es realitzen de manera determinista; l'ordinador s'ajuda de generadors de nombres aleatoris, com si llancés una moneda, de forma que l'etapa següent del càlcul depèn del resultat d'aquesta experiència aleatòria. Això pot semblar un contrasentit, atès que la virtut més gran d'un algorisme és la de donar, de la manera més ràpida possible, la solució exacta al problema; sembla que l'única cosa que les casualitats poder fer aquí és molestar. Alguns algorismes estocàstics són tals que, el que es busca, solament s'aconsegueix casualment; encara més, els algorismes donen la resposta correcta únicament amb una determinada probabilitat, o bé la solució és certa tan sols aproximadament, amb errors que també són aleatoris.

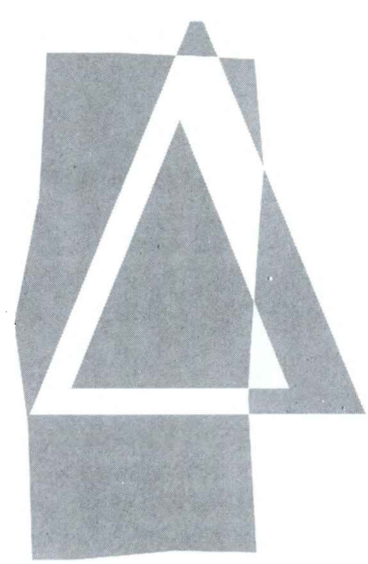
Fins a on ens hem de deixar portar? Naturalment, fins a on no hi hagi res millor a la nostra disposició, és a dir, quan no existeixi cap algorisme suficientment ràpid per a la solució exacta i la discrepància sigui, amb probabilitat alta, suportable per a les aplicacions pràctiques.

Algorismes de Montecarlo

Des de fa molt de temps es coneixen els *algorismes de Montecarlo* per a la integració de funcions. En aquest cas, s'elegeix a l'atzar el punt de partida per a la integració numèrica. En el cas que la funció estigui definida en un espai de dimensió superior a 1, aquests procediments tenen avantatges. Un altre exemple d'algorisme estocàstic o aleatori és el test per a nombres primers de Solovay-Strassen, desenvolupat a l'Institut de Matemàtica Aplicada de la Universitat de Zuric. Serveix per a contrastar si un nombre enter donat és primer, malgrat que ho fa amb una probabilitat d'error petita fixada, per exemple 10^{-10}. La despesa de càlcul per a aquest procediment és molt petita; mitjançant aquest mètode, nombres molt grans, amb 500 o més xifres poden ésser contrastats en molt poc temps. Fins ara no es coneix cap algorisme determinista que faci el mateix. Els nombres primers grans són la pedra angular dels pocs sistemes de codificació avui coneguts, de molta importància per a la protecció de dades.

El problema del viatjant

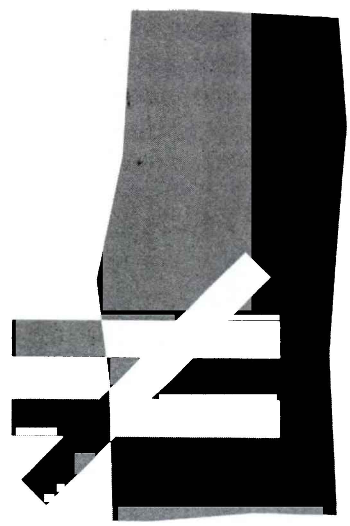
Molt sovint els algorismes estocàstics es proposen en problemes d'optimització complexos per als quals no existeix cap algorisme determinista que, llevat de molts pocs casos, pugui donar la solució exacta en un temps acceptable. Voldria descriure amb més precisió aquestes situacions. Un dels exemples més coneguts és el problema del viatjant (freqüentment se'l denomina TSP, de l'anglès *traveling salesman problem*). Un amant dels viatges —canviem una mica les coses— desitja visitar els estats més interessants del món, posem-ne, per fixar un nombre, 100. Coneix el temps necessari per a anar d'una ciutat a l'altra i desitja planificar el seu viatge de manera que, sortint del lloc on viu, pugui visitar tots els llocs previstos i tornar a casa en el mínim temps possible. Amb aquesta vestimenta el problema pot semblar rebuscat; ara bé, aquest i problemes similars d'optimització són de gran importància en la fabricació industrial. El nostre viatger es nodreix de les indicacions de C, el qual li ha de proporcionar la solució al problema. El procediment més natural consisteix simplement a provar cada ruta i després triar-ne la millor. Si cal visitar n llocs es tenen $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2$ rutes possibles. Suposem que vol veure 100 llocs i explora totes les rutes amb el seu potent PC, que pot examinar 10.000 rutes cada segon. Obtindrà la solució òptima aproximadament al cap de $10^{134} \times$(edat de l'univers) segons. El nostre rodamón no pot ajornar tantíssim el projecte i, per tant, cal que procedeixi d'una manera diferent. Clarament, el conjunt sobre el qual s'ha d'optimitzar, donat pel nombre de llocs a visitar, és immensament gran.



El TSP ha estat investigat intensivament i es coneixen procediments que són essencialment més ràpids que el descrit més amunt. Per a 100 llocs el problema es pot resoldre. No es coneix, tanmateix, un algorisme realment eficient i la majoria de matemàtics suposen que no por haver-n'hi cap, malgrat que aquest fet no hagi estat demostrat. El TSP pertany a una classe de problemes que es designen per *totalment* NP (NP denota *nondeterministic polynomial*); els problemes totalment NP són problemes complexos dins la classe dels problemes NP. Si per al TSP existís un algorisme eficient, també existiria per a la classe amplíssima de tots els problemes NP, i això, no ho pot creure pràcticament cap matemàtic.

El terme eficient s'empra aquí en un sentit molt modest; bàsicament significa que, el cost de l'algorisme, és a dir, el nombre d'etapes de càlcul creix, com a màxim, com una potència de la «mesura» del problema —en l'exemple anterior aquesta «mesura» fóra el nombre de llocs a visitar— en contraposició a un creixement exponencial, que és el que presenten tots els algorismes coneguts pel poblema del TSP. Encara que el cost creixés com la potència 100 del nombre de llocs a visitar, no hi hauria, a la pràctica, cap algorisme eficient. Malgrat aquesta observació, designaré per «petit» el creixement polinomial i per «gros» qualsevol més ràpid que aquest.

On és la dificultat per a resoldre el TSP de manera eficient? Una descripció global de totes les possibilitats és massa costosa. Una idea senzilla consistiria a començar amb una determinada ruta i després intentar millorar-la etapa a etapa. Per exemple, un pas pot consistir simplement a intercanviar dos llocs: a partir de la ruta Zuric-Atenes-Sydney-Zermatt-Pequín-Roma-Lagos, etc., intercanviem Zermatt i Atenes, essent la ruta resultant Zuric-Zermatt-Sydney-Atenes-Pequín-Roma-Lagos, etc. Si la ruta resultant és pitjor, no sembla que hi hagi cap motivació per a insistir en el canvi. Per tant, no la prendrem més en consideració i provarem altres intercanvis. Especificarem, doncs, només totes les rutes possibles obtingudes de la de partida mitjançant una permutació de dos llocs. El seu nombre no és molt gran i triem només aquelles que milloren substancialment la ruta inicial. D'aquesta manera es va més ràpid. Després de poc de temps aconseguim una mesura que ja no es pot millorar, i es pot esperar que així trobarem la ruta òptima. Això, però, és completament fals; en efecte, la gran dificultat del TSP es troba en el fet que, típicament, hi ha un nombre molt gran de mínims locals d'entre els quals possiblement sols un és la solució del problema, de manera que, molt probablement, el procediment anterior no condueix a la bona solució. En tot cas, darrera d'això hi ha una bona idea.



Entendre els aspectes bàsics de les dificultats

Als matemàtics, els agrada formular els problemes de manera abstracta per a poder entendre els aspectes fonamentals de les dificultats. Sigui M un conjunt (en l'exemple d'abans, el conjunt de totes les rutes possibles), que el podem imaginar immensament gran, i f una funció definida sobre aquest conjunt (la longitud de la ruta); el problema consisteix a trobar el mínim de la funció f i, en conseqüència, determinar la ruta convenient. El nostre rodamón, que vol planificar el seu viatge, ha observat la cosa següent: per a cada ruta R pot definir un conjunt petit $N(R)$ de rutes veïnes, per exemple, com hem fet més amunt, les obtingudes a partir de R permutant dues etapes de la ruta. És, però, temptador quedar-se amb aquelles en què únicament s'han fet poques permutacions. La paraula *poc* s'ha d'entendre sempre aquí en el sentit següent: el nombre creix, respecte a la mesura del problema, de forma polinomial. La mesura de M respecte de la nostra estructura veïna és també petita, mentre que M és molt gran. És també clar que triem la ruta minimal per mitjà d'una petita successió de variacions locals. El punt clau és que, típicament, no existeixen successions tals que, mitjançant permutacions de les seves etapes, portin a millores, i si això es produís excepcionalment seria difícil trobar-les.

Problemes d'optimització i sumes

Hi ha un bon nombre d'importants problemes d'optimització que tenen l'estructura esbossada anteriorment. Juntament amb problemes d'optimització, hi ha també importants problemes de sumes. Considerem una funció definida en un conjunt M que ha d'ésser sumada però que, a causa de la grandària de M no és possible fer-ho directament. La computació i l'anàlisi d'aquestes sumes difícils és, per exemple, de vital importància en la física i juga un paper clau en la recerca teòrica de les xarxes de neurones.

Una possible sortida a les dificultats descrites més amunt pot consistir a renunciar a la millor solució i acceptar generosament en el decurs del procediment alguna solució pitjor amb l'esperança que, d'aquesta manera, l'algorisme eviti certes depressions locals. Un procediment estocàstic senzill consisteix a acceptar, amb probabilitat petita, una ruta que és pitjor que l'antiga. Es diu que passem de l'algorisme. D'aquesta manera, amb probabilitat alta, evita mínims locals no gaire profunds i va a parar a d'altres més profunds amb l'esperança d'obtenir al cap d'algun temps una solució òptima. Realment, cal reduir la component estocàstica amb el pas del temps.

Això s'anomena *refredament*. Aquest algorisme procedeix de la física estadística i s'anomena *refredament simulat* (en anglès, *simulated annealing*). La qualitat del resultat depèn fortament de l'esquema de refredament triat. Hi ha moltes qüestions obertes en aquest context, concretament sobre l'esquema de refredament òptim. No pot, però, esperar-se cap miracle d'aquest algorisme. Un dels seus avantatges és la seva simplicitat i gran flexibilitat en les aplicacions; sense grans modificacions pot ésser aplicat als més diferents problemes d'optimització. El TSP està molt ben estudiat i existeixen algorismes deterministes molt adequats que, en part, donen millors resultats que el refredament simulat, malgrat no ésser bons en el nostre sentit. Ara bé, en tota una col·lecció d'importants problemes d'optimització, el refredament simulat dóna millors resultats que els procediments deterministes coneguts.

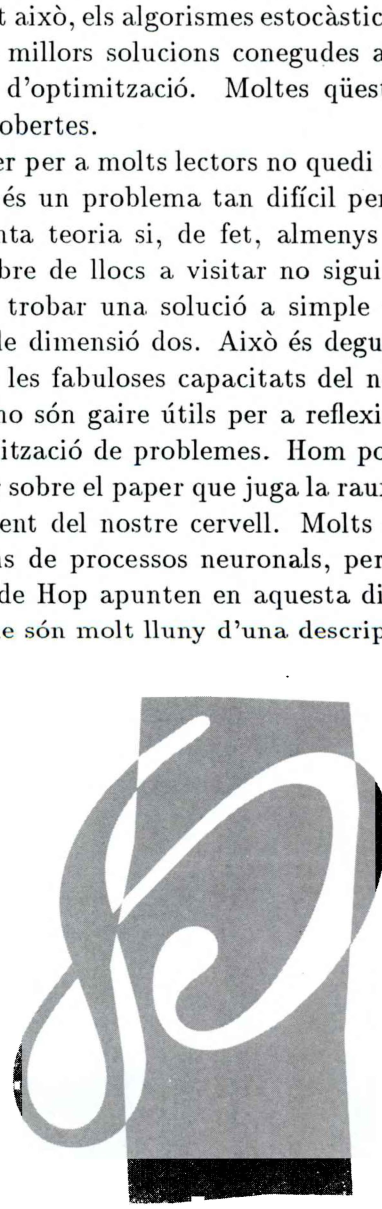
Les relacions en problemes com el TSP són extremadament complicades, especialment amb allò relacionat amb la topografia dels mínims locals que, essencialment determina el comportament de l'algorisme i sobre la qual cosa se sap ben poc. Sorprenentment, s'han descobert recentment relacions estretes amb la teoria de medis aleatoris de la física estadística, en particular amb els anomenats *cristalls spin*. De la mateixa manera fou també un descobriment sorprenent el fet que molts problemes de xarxes de neurones —una de les esperances més fortes de la intel·ligència artificial— presenten també estretes relacions amb les qüestions que hem discutit breument més amunt.

Per al TSP i es anàlegs no existeix fins avui cap algorisme estocàstic que proporcioni, en realment poc de temps, una solució prop de l'òptima, i de fet, hi ha la impressió que no pot haver-n'hi cap. Els algorismes estocàstics de Swendson i Wang i de Jerrum i Sinclair, molt ràpids per a resoldre problemes de sumes NP difícils, varen tenir fa alguns anys un èxit espectacular (cal mencionar que, per problemes de sumes, el concepte de NP s'ha de modificar lleument). A aquest tipus de problema pertany el càlcul aproximat de la suma d'estats en els models spin ferromagnètics de la física teòrica i el càlcul aproximat dels permanents.

Cap superordinador podrà resoldre el problema TSP

Quins problemes teòrics probabílistics es presenten en l'anàlisi d'aquest algorisme? Gairebé tots es poden concebre com cadenes de Markov. Per a disposar d'un exemple concret pensem novament en el problema del nostre rodamón. L'algorisme descrit més amunt és una cadena de Markov sobre el conjunt M de totes les rutes. És a dir, es fa una elecció aleatòria d'elements d'aquest conjunt que determinen l'elecció de rutes per l'algorisme de manera que en cada etapa, hom oblida el passat. Es poden fer modificacions en les quals s'incorpori alguna informació anterior, però aquí aquesta possibilitat quedarà fora de consideració. L'evolució estocàstica de la cadena queda descrita completament mitjançant les probabilitats de transició; donades dues rutes R, S, designem per $p(R,S)$ la probabilitat que l'algorisme vagi de R a S. Com hem explicat anteriorment, només es permeten salts a rutes veïnes, com per exemple, aquelles obtingudes permutant dos llocs. Triarem les probabilitats $p(R,S)$ en funció de les rutes que hi intervenen: Si la ruta S és més llarga que la R assignarem un valor petit a $p(R,S)$ car, en definitiva, busquem camins curts. Pel que fa al comportament de l'algorisme, resulta decisiu el que passa al cap de moltes iteracions (l'ordinador potser en fa uns quants milers per segon). El càlcul de totes les probabilitats de transició, és a dir, la probabilitat que, sortint d'una ruta, ens trobem en una altra al cap de, posem 1.000 passos, resulta, en principi, molt senzilla: cal calcular la potència 1.000 de la matriu $p(R;S)$. Pensem, però, que el nostre conjunt M és gegantí; si volem visitar 100 estats les nostres probabilitats de transició formen una matriu $10^{158} \times 10^{158}$. És veritat que moltes de les seves components són nul·les, però aquesta simplificació s'esvaeix ràpidamet per potenciació. Cap superordinador és capaç de calcular aquests productes de matrius. Ara bé, un resultat elemental de la teoria de la probabilitat diu que, en el límit, quan el nombre de multiplicacions és quasi infinit, les coses se simplifiquen novament; la probabilitat que, després de molts i molts de passos l'algorisme es trobi en S és, sortosament, independent de la ruta de sortida i està donada per l'anomenada *distribució estacionària* de la cadena de Markov. Aquesta distribució estacionària pot determinar-se mitjançant un sistema d'equacions lineals amb tantes incògnites com rutes hi ha en M. Sortosament, i sorprenentment, en molts casos aquesta distribució estacionària es pot calcular o determinar de forma aproximada, àdhuc tan explícitament que, per especificacions determinades dels paràmetres, es posa de manifest que està concentrada en les rutes curtes. Amb el nostre algorisme TSP les coses es complicaran, atès que la matriu de transició anirà canviant al llarg del temps. Això cal que es tingui en compte, pero no ho discutirem aquí. Fins aquí tot va bé: la teoria garanteix al nostre rodamón que —si pot deixar funcionant el seu PC indefinidament— aquest li proporcionarà amb la més alta probabilitat una bona ruta. Potser no esperarà tant de temps per a saber el resultat i, per tant, és important conèixer quantes iteracions es necessiten per tal que la distribució de probabilitat sobre M sigui propera a l'estacionària. Tals qüestions han estat investigades intensivament en la teoria de la probabilitat. En situacions favorables és suficient fer quasi tantes iteracions com indica el cardinal de M. Aquest és el cas per als algorismes ràpids per a sumes esmentats més amunt. Per al TSP i problemes relacionats, la situació és, malauradament, menys favorable. Malgrat això, els algorismes estocàstics proporcionen les millors solucions conegudes a molts problemes d'optimització. Moltes qüestions resten encara obertes.

Potser per a molts lectors no quedi clar per què el TSP és un problema tan difícil per què necessita tanta teoria si, de fet, almenys en cas que el nombre de llocs a visitar no sigui gaire gran, podem trobar una solució a simple vista en un mapa de dimensió dos. Això és degut en part al fet que les fabuloses capacitats del nostre còrtex visual no són gaire útils per a reflexions precises i visualització de problemes. Hom pot també especular sobre el paper que juga la rauxa en el funcionament del nostre cervell. Molts dels models moderns de processos neuronals, per exemple el model de Hop apunten en aquesta direcció, malgrat que són molt lluny d'una descripció realista.



Erwin Bolthausen és professor a l'Institut de Matemàtica Aplicada de la Universitat de Zuric.

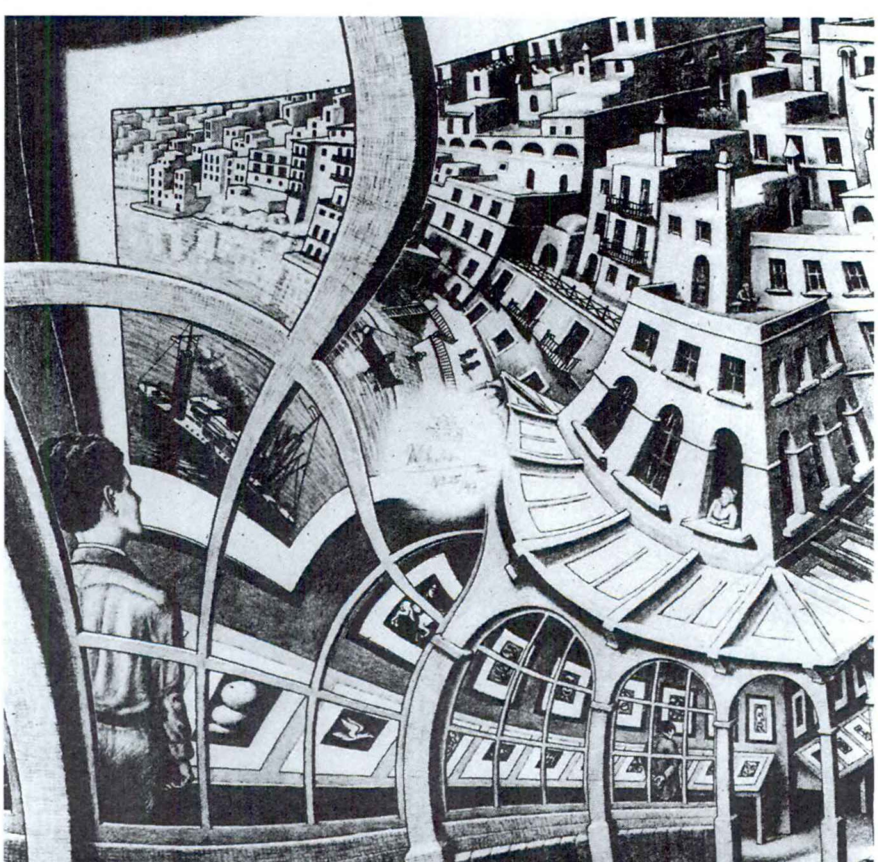
La raó del sentiment musical

«Tots els músics estan d'acord que l'element emocional de la música es fonamenta en un fort element formal». Així expressà el matemàtic Hermann Weyl aquesta important hipòtesi el 1951, en el seu llibre *Symmetrie*, i afegeix que, pel que sembla, no es disposa encara de les eines matemàtiques per a la descripció dels aspectes formals de la música. Des de l'any 1992, el projecte RUBATO del Fons Nacional Suís, instal·lat en el Laboratori Multimèdia de l'Institut d'Informàtica de la Universitat de Zuric, manté una estreta relació amb aquesta hipòtesi de Weyl.

GUERINO MAZZOLA

Per primera vegada, matemàtics, informàtics i musicòlegs desenvolupen conjuntament una teoria matemàtica de la interpretació musical, la fan operativa en forma de *software* i la proven musicalment. Així es modela de manera teòrica i experimental un accés formal a l'element emocional de la música. El projecte contribueix, a més, als esforços internacionals per a crear un llenguatge musical estàndard SMD en la tecnologia de la informació.

Ja en els anys vint, el jove matemàtic Wolfgang Graeser havia intentat de desenvolupar per mitjà de la teoria de grups, justament aquelles eines de les quals parla Weyl. Només tenia vint-i-un anys quan, el 1928, desesperat d'aquesta tasca, es va treure la vida. Graeser fou alumne del teòric de grups de Zuric Andreas Speiser, que el 1932 realitzà una anàlisi combinatòria de la sonata *op.* 28



La litografia «Print Gallery» (1956) de Maurits Cornelis Escher representa l'acte de la interpretació d'una obra d'art. L'observador de l'esquerra contempla, a partir del quadre, la realitat deformada de la interpretació. En la música això es tradueix literalment en la deformació els paràmetres de la partitura.

de Beethoven i de la qual parla Weyl en *Symmetry*. El matemàtic de Darmstadt, Rudolf Wille, examinà l'any 1984 el projecte de Graeser i arribà a la conclusió que en aquells darrers temps s'havia dut a terme, si més no, parcialment.

Avui sabem que el pensament musical simbòlic no és una pobre abstracció de certs fenòmens físics, sinó que fa palesa una estructura autònoma que requereix les eines de la matemàtica més moderna per a la seva comprensió. Així, en el model matemàtic del contrapunt clàssic de Fux, cal una diferenciació entre intervals consonants i dissonants, que no té cap motivació física. Els intervals s'han de pensar aquí com tangents a les notes del *cantus firmus*, repartides simètricament. Ha estat només l'àlgebra moderna, amb el concepte dels nombres duals i llurs grups de simetries, la que ha pogut explicar aquest pensament musical autònom.

El projecte RUBATO pressuposa l'existència d'una tal geometria dels sons que conforma el pensament musical i de la qual Alexander Grothendieck, el pare de la geometria algebraica moderna, digué que és ben bé la matemàtica de la «nova era».

Símbols musicals i realitat sonora

El fet musical, però, no es pot reduir al pla simbòlic: també forma part de la música la interpretació instrumental i vocal. Només aquí la música, com a expressió dels sentiments, pot establir comunicació amb la capacitat emotiva del que escolta. I només així es realitza plenament la intenció del compositor. L'acte d'interpretar no és, per tant, complementari sinó essencial : «La idea de la interpretació és part de la pròpia música i no li és accidental», segons el filòsof de la música Theodor W. Adorno.

Aquesta descoberta és analitzada pel projecte RUBATO. L'objectiu és investigar la transformació, i les seves lleis, de la realitat simbòlica de la partitura en la realitat física de la interpretació, per a realitzar-ho en forma de *software*. No es tracta, en principi, d'estudiar els aspectes psicològics de la música, sinó la forma externa de la interpretació i els seus paràmetres. Per exemple, s'ha d'examinar l'agògica: quina influència pot tenir un calderó o un canvi de tonalitat en la configuració del temps?, és adequat el concepte de temps únic per a una bona interpretació o s'hauria de parlar d'una jerarquia de temps?

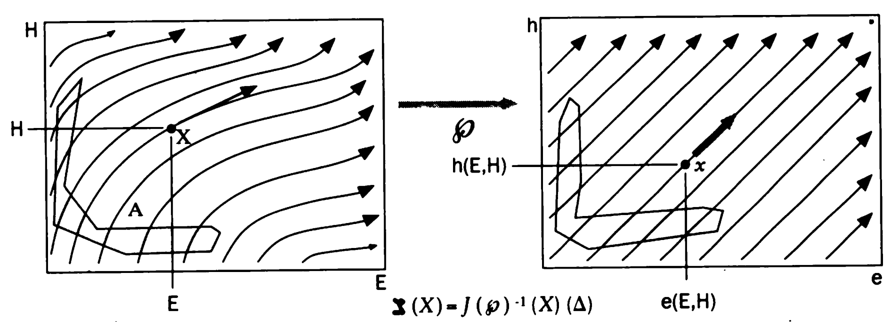
Una teoria de transformació de les dades simbòliques de la partitura en les dades físiques de la interpretació es divideix en dues parts: En primer lloc, s'ha d'explicitar la pròpia estructura de la transformació: aquesta ha de donar per a cada nota de la partitura una instrucció clara de com s'ha de tocar. En segon lloc, una maquinària analítica aplicada a la partitura ha de definir els detalls de l'estructura de la transformació. Tots dos problemes teòrics pogueren ser resolts durant el primer any del projecte RUBATO. I de manera que, variant paràmetres sistema, s'obté —lluny de l'absurditat d'una única interpretació ideal— tot un ventall de possibles versions d'una determinada partitura clàssica.

La partitura d'interpretació

Al mecanisme de transformació que ens permet de passar d'una partitura a la seva interpretació, l'anomenem *partitura d'interpretació*. Es pot comparar amb un sistema de lents, a través del qual el text partitura dóna com a imatge la interpretació sonora. Cadascuna de les seves lents, una cèl·lula d'interpretació, opera només localment sobre un petit fragment de la partitura. Això, ens ho podem imaginar de la següent manera: si hom col·loca la partitura a sota la lent, el fragment corresponent apareix deformat. Les longituds i els angles varien, els pentagrames es torcen, les notes dels acords es desagrupen, els caps de les notes canvien de gruix. De manera anàloga, passa en la imatge sonora de la interpretació: notes d'igual altura sonen —posem en instruments de corda— diferent; notes simultànies s'arpegien lleugerament, o bé, en el piano, la mà dreta toca una melodia *rubato* (amb petits retards en l'atac) mentre la mà esquerra acompanya; notes sota el mateix indicador d'intensitat es toquen diferent, segons el seu pes mètric o harmònic. Resumint: la interpretació és el resultat d'una deformació de l'encarcarat quadre de la partitura (vegeu la litografia). Seguint aquest símil, una interpretació a primera vista es correspon amb una imatge amb prou feines deformada, quasi immòbil, del quadre musical.

En conjunt, la partitura d'interpretació regeix la deformació interpretatòria de la partitura a la manera d'un sistema jeràrquic de cèl·lules que operen localment. Hem après, en particular, que el temps a la interpretació musical forma una jerarquia ramificada. La música no pot adoptar de cap manera la línia del temps física! Uns primers experiments amb complexes jerarquies de temps en obres de Czerny i de Chopin (vegeu la figura 2) han confirmat aquest fet, també a la pràctica.

Una partitura d'interpretació així, que es col·loca com si fos una làmina damunt de la partitura (simbòlica), és una eina essencial per a entendre el procés interpretatiu. En aquest apareixen, també, qüestions sobre la forma d'interpretar connectades amb la psicologia de la música i amb l'anàlisi musical.



Camp d'interpretació ζ Camp diagonal Δ

Figura 1. La transformació d'interpretació dels espais de paràmetres musicals del pla simbòlic en el pla físic és localment una aplicació diferenciable amb inversa. Aquí es representa el pla de coordenades: temps d'atac (simbòlic E[negres], físic e[minuts]) i altura (simbòlic H[mitjos tons], físic h[cent]). El camp d'interpretació ζ s'obté del camp diagonal de la dreta, Δ, per mitjà de la inversa de la matriu de Jacobi. El transformat x del punt X s'obté dels paràmetres de la ζ-corba integral que passa per X, en tallar-se amb un conjunt A de punts simbòlics, els transformats dels quals són coneguts.

La matemàtica que descriu aquestes transformacions procedeix de la teoria de camps de fluxs o camps vectorials i utilitza el teorema fonamental d'existència i unicitat de les solucions d'equacions diferencials ordinàries (vegeu la figura 1). Com que els espais de paràmetres dels sons tenen diverses dimensions (temps d'atac, durada, intensitat, altura), les cèl·lules d'una partitura d'interpretació es basen en camps vectorials pluridimensionals, els camps d'interpretació. En principi, aquests camps no es poden dividir en components unidimensionals: així, per exemple, fins i tot en el camp d'una interpretació a primera vista, les components temps d'atac i durada del camp d'articulació (en el *legato, staccato*, etc.) ja van aparellades.

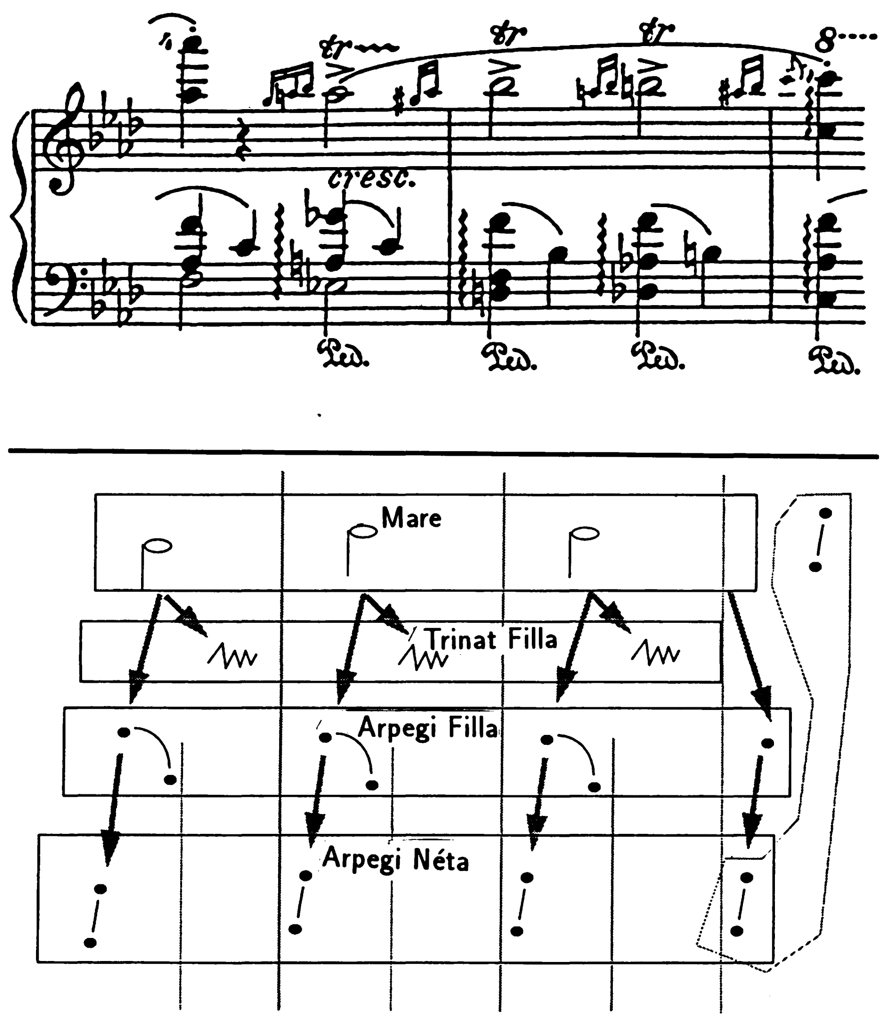


Figura 2. Aquest exemple de l'impromptu *op.* 29 de Chopin mostra una jerarquia de temps, que corresponen a quatre sectors locals. El temps-mare correspon a les «notes d'ancoratge» (fixes) dels trinats. Conté un temps-filla que dissenya el tempo de les notes que van sonant en el trinat i un altre pels corresponents grupets de dues notes lligades de la mà esquerra. Aquest darrer és, a la vegada, mare del temps-néta de l'arpegi. L'ordenació jeràrquica significa que una filla ha de sincronitzar amb la seva mare en els corresponents extrems de l'interval de temps. En mig de l'interval, una filla pot dissenyar el seu *tempo* lliurement, sempre que mantingui les condicions de sincronització. Aquesta partitura de *tempo* il·lustra la concepció no lineal del temps en una interpretació musical.

De dades analítiques a camps d'interferències

En el projecte RUBATO es tracta essencialment d'introduir uns procediments d'anàlisi de la partitura per a construir les corresponents partitures d'interpretació i, d'aquí, conformar una interpretació que expressi una comprensió racional del text musical. L'estudi de cóm l'harmonia, la rítmica, la motívica, etc., dissenyen una interpretació és un pas important, no tan sols quant a la conjectura de Weyl, sinó també vers la creació d'una semàntica (ciència del significat) del text musical, que inclogui també el sentiment.

Hem dividit la construcció, de motivacions analítiques, de la partitura d'interpretació en tres etapes: Primer s'obtenen les dades de l'anàlisi que hem escollit. LLavors, s'utilitzen aquestes dades per a ponderar determinats elements de la partitura, com ara notes, acords, motius, d'acord amb el pes que aquests elements presenten en la corresponent anàlisi. En un tercer pas decisiu es basteix el pont entre el pla simbòlic de les dades analítiques i el pla físic de la partitura d'interpretació.

Això es fa, primer, interpolant una funció de pes donada, definida sobre elements de la partitura, a una funció llisa a tot l'espai: el potencial d'estructura. Aquest s'utilitza per a deformar el camp interpretatiu *prima vista*, que s'obté automàticament a partir de les dades inicials de la partitura. El camp d'interferències es calcula, de manera natural, a partir de la derivada de Lie del potencial d'estructura sobre el camp interpretatiu *prima vista*. Aquest és un formalisme clàssic de la física matemàtica, que també s'aplica a la teoria de la interpretació.

Lògica geomètrica de l'anàlisi musical

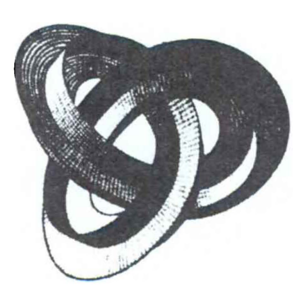
Mentre que un text lingüístic normal és una ordenació lineal de cadenes de paraules, l'escriptura musical clàssica europea presenta una estructura espacial que no es pot copsar amb anàlisi lògica purament seqüencial. La sintaxi musical d'una partitura no es deixa linealitzar com la de la llengua, i això implica que l'expressió metafòrica en la música només pot donar una descripció fragmentària de la seva pluralitat formal (!) de significats. Per això calen tècniques geomètriques de la teoria matemàtica de la música per a l'anàlisi de les configuracions musicals. La geometrització estricta d'aquestes tècniques, però, deixa de banda els aspectes lògico-predicatius del pensament musical. Així, per expemple, hom voldria poder dir no només que la nota sol és el lligam harmònic (la intersecció) entre els acords de do major i sol major, sinó també que do i sol fan la funció de tònica i dominant, respectivament, en la tonalitat de do major i la nota sol és el lligam harmònic entre ambdós acords fent llurs funcions.

El pensament musical no considera únicament objectes sonors geomètrics, sinó que aquests poden portar altres predicats —no necessàriament geomètrics— amb càrrega semàntica, fins i tot amb connotacions històrico-culturals, com és el cas de l'expressió *Cohet de Mannheim*, que indica un *crescendo* practicat per l'escola de Mannheim. Els objectes d'una anàlisi matemàtica semiòticament acceptable han d'ésser, per tant, objectes amb significat, objectes matemàtics més predicats, per a abreujar-ho: preobjectes. En aquest marc teòric disposem de models i els corresponents programes d'ordinador que permeten posar en marxa un bon nombre d'anàlisis harmòniques, motíviques, mètriques i contrapuntístiques; a la vegada que —via la semàntica dels preobjectes— tenim a l'abast uns paràmetres de control per a l'elaboració dels camps d'interferències.

Implementació i perspectives

La teoria aquí descrita s'implementa en el *software* RUBATO, que consta de dos mòduls i és proper al NEXT-STEP. El mòdul d'estructuració —basat en la teoria de preobjectes— s'encarrega de l'anàlisi d'una partitura (que es llegeix, per exemple, en fitxers MIDI estàndard). El mòdul de configuració converteix aquesta anàlisi en una partitura d'interpretació, per mitjà de les derivades de Lie dels potencials d'estructura, i crea un nou fitxer que en dóna la versió sonora en instruments o sintetitzadors MIDI.

Els treballs actuals en el projecte RUBATO i el seu *software* s'apliquen a la implementació i a l'anàlisi comparativa de la interpretació per mitjà del test empíric de parts de programes. Esperem descobertes fonamentals quant a la relació entre text simbòlic i imatge sonora, una difícil tasca en la teoria dels signes musicals, tant en la seva vessant matemàtica, com en tècnica de programació, o en teoria de la interpretació. Es treballa també en la integració dels codi objectes i del llenguatge teòric que aquí hem esbossat, en les activitats internacionals d'estandardització de la ISO/IEC. Un panorama molt prometedor per a les multimèdia suïsses i per a la tecnologia de la informació.



Guerino Mazzola és matemàtic, músic i director del projecte RUBATO del Fons Nacional a l'Institut d'Informàtica/Laboratori Multimèdia de la Universitat de Zuric.

El Problema dels generals bizantins

El *Problema dels generals bizantins* il·lustra una situació que apareix sovint en la informàtica d'avui: es té una idea que podria resoldre un problema concret, però no s'està completament segur de si el mètode funciona també en altres casos. Dos exemples suggereixen que els llenguatges naturals no són adequats per a les reflexions lògiques i que, per tant, s'han de desenvolupar els llenguatges artificials. A continuació s'exposen les idees de l'autor sobre les aplicacions d'aquests llenguatges formals a d'altres ciències, a part de la informàtica.

CLEMENS H. CAP

Quatre generals, que anomenarem Alfa, Beta, Gamma i Delta, setgen Bizanci amb el seu exèrcit. La situació de la guerra és tal que només l'atac conjunt de com a mínim tres exèrcits pot ser victoriós. Com que una reunió enmig de la guerra no és possible, els quatre generals s'han de posar en contacte per mitjà d'un missatger per a decidir si ataquen o bé es retiren de Bizanci sense lluitar. Si només dos generals, o bé només un, comencen sols la batalla, aquesta acabarà en una gran derrota. Aquesta decisió es veu agreujada pel fet que entre els quatre generals hi ha un traïdor, la identitat del qual els tres generals lleials desconeixen. Els generals comencen amb un intercanvi de missatges en els quals exposen la seva opinió. El traïdor també envia el seu missatger, però actua incorrectament: li comunica a un general que està a favor de l'atac i, per contra, a un altre que afavoreix la retirada. Aquests volen, naturalment, desemmascarar el traïdor i per tant seguidament es demanen l'un a l'altre què havia dit, doncs, el col·lega. Així demana, diguem, el general Alfa als col·legues Beta i Gamma quina opinió havia expressat Delta. Beta contesta que Delta estava a favor de l'atac, mentre que Gamma diu que Delta afavoria la retirada. Podran els tres generals lleials, davant d'una situació tan confusa, arribar a una decisió conjunta única? Es considera que un traïdor de vegades, per tal de camuflar-se, actua de manera totalment correcta.

Una solució dels problemes bizantins

Una solució òbvia seria que un general nomenés un recomptador de vots. Cada oficial li enviaria el seu vot sobre atac o retirada i subseqüentment comunicaria als altres la decisió obtinguda. Lamentablement, no es pot garantir que el recomptador de vots no sigui el traïdor. Per tant, els generals han de procedir de la manera següent: En una primera volta, cada general ha de comunicar als altres la seva propia opinió. En una segona volta es comunica la informació rebuda en la primera volta. Cada general disposa ara de tres informacions relatives a cadascun dels altres tres generals: una que prové del general mateix i dues que provenen dels seus col·legues. Ara obté, a partir d'aquestes tres declaracions, una decisió majoritària: atac o retirada. Així, cada general pot determinar per ell mateix la decisió majoritària corresponent a cadascun dels seus col·legues. A continuació, a partir d'aquestes tres informacions i de la seva pròpia opinió obté de nou una decisió majoritària. En cas d'igualtat de vots es decideix per la retirada.

Els generals bizantins i la informàtica

Experimenteu una miqueta i us convencereu que els tres generals lleials arriben, de fet, a la mateixa conclusió. És possible una solució semblant en el cas de dos traïdors i sis lleials, o bé són necessaris en aquest cas més generals lleials? Es poden adoptar els mateixos mètodes, o bé se n'han de desenvolupar de nous a partir d'una discusió més general?

Per què s'interessa la informàtica en questions d'aquesta mena? Els ordinadors s'utilitzen en moltes situacions de la nostra vida i l'experiència ha demostrat que aquests només són fiables fins a un cert grau. És així, els errors de programació, però també les descàrregues electroestàtiques, la radiació ionitzant i els defectes de material poden conduir a una computació defectuosa. L'ordinador pot fins i tot ser afectat de tal manera que canviï els senyals lluminosos del tren en el qual vostè està viatjant i llegint aquest article. Però no cal preocupar-se! Substitueixi els generals de la nostra anècdota per l'ordinador. El traïdor pren aleshores el significat d'un ordinador defectuós. Recordi que fins i tot amb la presència d'un traïdor, la resta dels generals arriben a una decisió idèntica. Si vostè té també quatre ordinadors a la seva disposició per a fer una feina delicada, també li'n pot fallar un sense que això arribi a portar cap problema especial.

A causa de les seves especials necessitats, ja s'apliquen des de fa anys aquest i d'altres trucs semblants en el camp de l'astronàutica per tal d'incrementar la fiabilitat dels sistemes de computació. En l'aviació civil, i en altres àrees on s'utilitzen els ordinadors d'una manera crucial, ja s'hi estan introduint. El problema dels generals bizantins no té, però, importància només per ell mateix. Les preguntes que ens hem fet en connexió amb la solució que hem proposat són característiques d'una situació que es dóna sovint en el camp de la informàtica: tenim una idea de com s'ha d'actuar davant d'un problema concret, però no estem completament segurs de si els nostres mètodes funcionen també en altres casos.

Per què necessita la matemàtica llenguatges artificials?

Els problemes del nostre llenguatge són coneguts: Des d'Aristòtil (384-322 aC) és coneguda l'antinòmia del mentider continguda en la sentència «Aquesta sentència és falsa». Es miri com es vulgui, quan aquesta sentència és vertadera és falsa i, quan és falsa, aleshores és vertadera. Les antinòmies ens mostren que en català, i també en totes les altres llengües naturals, es poden generar embolics deguts a una confusió entre el nivell de l'objecte descrit i el nivell del llenguatge que descriu l'objecte. Les antinòmies ens ensenyen una sana desconfiança envers les reflexions fetes en els llenguatges naturals i ens indueixen a desenvolupar els llenguatges artificials, amb els quals les antinòmies i les ambigüitats esdevenen impossibles.

Un llenguatge artificial consisteix en un conjunt finit de símbols i en un nombre finit de regles, les quals determinen quins arranjaments de símbols es consideren, de fet, paraules del llenguatge. Així, el llenguatge de l'aritmètica consisteix en els numerals, els símbols d'operacions $+-\times/$, els parèntesis (i), com també el símbol d'identitat $=$. Les regles d'aquest llenguatge fan que els arranjaments 2 o bé 2+3, o bé 3+4=7 siguin considerats paraules del llenguatge i, en canvi, no ho sigui l'arranjament $2++\times$. 3+4=5 és una paraula del llenguatge de l'aritmètica, encara que fins aquest moment no hem fet cap declaració sobre si representa un fet correcte o incorrecte ni sobre com aquesta paraula s'hauria d'interpretar.

L'antinòmia de Richardson

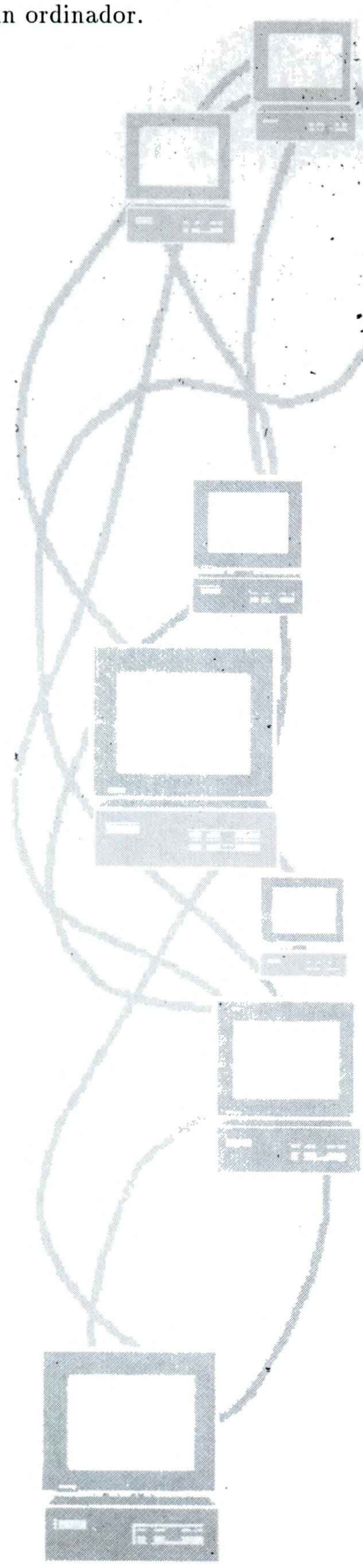
En català podem descriure els nombres naturals per mitjà d'un text. Així, el text «El nombre que és la suma de tres i quatre» descriu el nombre set. Per a aquesta definició hem necessitat 32 lletres. Ara volem escriure en un full de paper tots i cadascun dels nombres naturals que poden ser descrits per mitjà d'una sentència de la llengua catalana de menys de cinc-centes lletres. Aquests són, per descomptat, molts nombres. Però només es poden donar un nombre finit de sentències catalanes amb menys de cinc-centes lletres, les quals descriuen, per tant, només un nombre finit de nombres naturals. Volem ara considerar el nombre natural més petit que no es troba escrit al full de paper. Aquest és «El nombre natural més petit que no pot ser descrit amb una sentència de la llengua catalana de menys de cinc-centes lletres». Però, no és aquesta darrera sentència una tal sentència descriptiva de menys de 500 lletres?

Sobre el significat dels llenguatges artificials

Fins ara hem considerat només la *Sintaxi* dels llenguatges artificials. Ara volem estudiar la seva *Semàntica*, i també el seu significat. Per a això, assignem a cada paraula del nostre llenguatge un objecte d'un model. Aquest model pot consistir en construccions del pensament i en abstraccions, i també en idees platòniques. Pot també consistir en els mesuraments d'un físic fets en un laboratori, en el contingut d'un programa d'ordinador, o també en objectes matemàtics. En el nostre llenguatge aritmètic volem assignar a la paraula 2 el nombre i també el pensament abstracte *dos*. A una paraula de la forma $A + B$, li volem assignar la suma dels valors que hem assignat a A i a B. A la paraula 3+4=7 li assignem el concepte *vertader* i a la paraula 3+4=5 el concepte *fals*. Naturalment, podriem també haver assignat a la paraula 2 un altre nombre, per exemple *dotze*, però les convencions usuals sobre el significat dels nombres en la cultura occidental ens han induït a la decisió esmentada anteriorment.

Sobre el funcionament dels mètodes formals

En el llenguatge artificial utilitzat en el nostre exemple podem, en particular, trobar sentències sobre fets aritmètics. Així, per exemple, a la paraula 3+4=7, li assignàvem el concepte *vertader*, i volem interpretar-la com una descripció d'un fet aritmètic. També a la paraula 1+2=3, li correspòn el valor de veritat *vertader*. A partir d'aquestes dues paraules vertaderes podem construir la paraula vertadera 1+2+4=7. Evidentment, seguint la regla següent: si tenim dues paraules de la forma A+B=C i D+E=A, en les quals les lletres A, B, C, D i E representen nombres, que tenen el valor de veritat *vertader*, aleshores també té aquest valor de veritat la paraula D+E+B=C. Així, sense calcular i sense pensar sobre els objectes concrets del nostre model, podem arribar a noves sentències vertaderes només reordenant les tires de lletres d'acord amb les regles. La investigació rigorosa d'aquests sistemes de regles és tasca de la lògica. La lògica de l'aritmètica consisteix en un nombre petit de regles, semblants a les del nostre exemple, que ens permeten derivar molts d'altres fets aritmètics per mitjà d'una pura manipulació de text i de símbols. Aquesta manipulació es pot esquematitzar i pot ser efectuada per un ordinador.



Diferents lògiques

La idea que es poden obtenir noves veritats a partir d'una reordenació de símbols seguint unes regles de joc prèviament donades té quelcom de fascinant. L'exemple que hem utilitzat anteriorment és realment molt simple i fa que el llenguatge tècnic dels matemàtics resulti una mica presumptuós per a parlar de fets trivials. Aquest, però, és necessari en situacions més complexes. En això precisament consisteix sovint el treball d'un matemàtic: a partir d'unes poques propietats d'un objecte arribar a nous coneixements per mitjà de la manipulació dels símbols d'un llenguatge artificial. Amb l'aplicació estricta d'aquest mètode lògic no és necessari conèixer el significat del llenguatge. Només es tracta d'aplicar les regles adequades en la successió correcta. En la pràctica, però, una idea intuïtiva és molt útil, tant per a l'elecció de les regles com per a la interpretació del resultat.

Lògica de programes, la qual demostra la correcció d'un programa de divisió

$\{0 \leq x \text{ and } 0 < y\}$
$r : 0x; q := 0;$
$\{0 \leq r \text{ and } 0 < y \text{ and } x = y * q + r\}$
while $r \geq y$ do
begin $\{0 \leq r \text{ and } 0 < y \leq r \text{ and } x = y * q + r\}$
$r := r - y; q := q + 1$
$\{0 \leq r \text{ and } 0 < y \text{ and } x = y * q + r\}$
end
$\{0 \leq r < y \text{ and } x = y * q + r\}$ —

Un físic teòric va a la recerca d'unes regles tals que permetin predir tan bé com sigui possible els resultats dels experiments físics. És impressionant en aquest cas com en són de bons els mètodes formals que poden ser utilitzats: Transformacions de símbols més o menys complicades en la pissarra d'un científic poden descriure la trajectòria dels coets o el comportament de les partícules elementals i les estrelles. El model del món del físic, les veritats del qual voldria descobrir i descriure, li ve donat des de fora mitjançant els seus instruments de mesura. En l'absència d'aquests, el físic treballa per obtenir un coneixement exacte del món amb diversos sistemes de regles, depenent de l'àrea d'estudi, les quals serveixen de criteri de decisió. Mentre que la física de cada dia se serveix de la lògica clàssica i de les mateixes lleis que funcionen en el nostre coneixement d'estar per casa, el físic de partícules necessita unes regles especials, l'anomenada *lògica quàntica*, ja que els seus experiments sembla que contradiuen el nostre sentit comú. El matemàtic estudia creacions ideals concretes i té, per tant, moltes menys limitacions a l'hora d'escollir les regles. Els llenguatges dels informàtics han de poder descriure tant les abstraccions del nostre pensament i del món que ens envolta com els sistemes físics, com són els ordinadors o els instruments de control.

Lògiques no clàssiques

Volem considerar ara la lògica no monòtona i la *lògica lineal* com dos exemples de llenguatges artificials i de sistemes de regles, els quals juguen un paper especial en la informàtica d'avui. A més, aquestes lògiques difereixen clarament de la lògica comuna i de la *lògica de predicats* tan important en la matemàtica.

En molts sistemes lògics val el principi que a partir del coneixement de nous fets podem també deduir noves conseqüències. En particular, nous fets no poden fer que conclusions prèviament establertes deixin de ser vertaderes. Volem il·lustrar això amb el famós exemple de l'estruç. Suposem que sabem «Tot ocell pot volar», i també «El pardal és un ocell» i «L'estruç és un ocell». Ara podem concluir: «El pardal pot volar» i «L'estruç pot volar». Ara descobrim que l'estruç no pot volar. Basant-nos en el nou coneixement d'aquest fet ja no podem concloure que, atès que l'estruç és un ocell, aquest pot volar. El coneixement d'un nou fet ha convertit en inadmissible una conclusió prèviament vàlida. El coneixement que és parcialment inconsistent, o més exactament, el que modifica gràcies a noves percepcions un saber ja establert, representa un problema central de la intel·ligència artificial i no és tractable amb les tècniques de la *lògica de predicats*.

Una altra declaració de la lògica de predicats és la següent implicació: suposem que sabem «Si A, aleshores B» i «Si A, aleshores C». Llavors podem concloure: «Si A, aleshores B i C».

Si ara en lloc de A posem «Plou», en lloc de B «L'aire és humit» i en lloc de C «El terra es mullarà», aleshores sembla que aquesta implicació se satisfà. Però si ara en lloc de A, vostè posa «Tinc un bitllet de 5 francs», en lloc de B «Puc comprar una barra de pa de 4 francs» i en lloc de C «Puc prendre un cafè de 3 francs», és aquesta implicació encara vàlida? El misteri queda ràpidament resolt amb la següent consideració: La lògica de predicats i en particular la implicació que hem considerat no és adequada per a descriure els canvis en les condicions. Atès que la modificació de les condicions, és però, un fenòmen comú des de l'inici dels programes d'ordinador, els informàtics s'interessen especialment per la recentment desenvolupada lògica lineal en la qual es pot formular que l'ocurrència de B gairebé «consumeix» un fet de tipus A.

Lògica i informàtica

Molts enginyers deuen sovint el seu reconeixement d'alta fiabilitat al fet que en el seu camp existeixen molt bons models matemàtics. Gràcies als més de quatre mil anys d'experiència en arquitectura i en matemàtiques, i gràcies al fet que disposem des de fa uns tres-cents anys del càlcul diferencial i integral, podem disposar ara de mètodes precisos per a l'anàlisi del comportament estàtic dels edificis. Si en el nostre segle els ponts s'enfonsen, no es pot acceptar com a vàlida l'excusa de la ignorància.

Els objectes de la informàtica es poden descriure lògicament d'una manera més senzilla que no pas el comportament de les parets sota tensions. La informàtica actual, a pesar o potser a causa del seu ràpid desenvolupament, com a ciència extremadament jove, disposa encara d'una fonamentació teòrica molt petita. Els programes, contràriament als edificis, els quals són controlats per un analista de tensions, molt sovint només es comproven en alguns pocs casos. En la pràctica, com tot usuari de la informàtica al cap del temps acaba malauradament comprovant, moltes vegades resulten defectuosos. Hi ha, però, una esperança ben fonamentada que en el futur també en la informàtica disposarem d'una fonamentació teòrica i d'una experiència més àmplia, de tal manera que les eines de la lògica formal podran ser utilitzades amb molt d'èxit.

Per a aconseguir això, per a cada objecte amb què treballem en la informàtica, hem de desenvolupar una formulació en un llenguatge lògic adequat. Aquest objectiu s'hauria d'aconseguir en pocs anys. Així, avui dia ja disposem d'una lògica molt potent per a la descripció de programes sequencials, en canvi en el terreny dels sistemes compartits i paral·lels encara s'han de resoldre algunes qüestions. Al mateix temps, s'haurien de desenvolupar mètodes que fossin útils per a la manipulació d'aquests llenguatges. Així, la longitud total del programa del sistema del transbordador espacial americà, mesurada en línies de programa arriba a més de deu millions. Mentre no hi hagi tècniques que ens permetin saber, per exemple, quines conseqüències d'un programa es deriven dels efectes d'una sola línia, no podrem desfer aquesta enorme complexitat.

El problema dels generals bizantins ha estat, per cert, investigat amb detall ja fa alguns anys. Ara ja es pot demostrar efectivament, per mitjà de tècniques lògiques, quan i com és possible un consens entre els generals. Amb dos traïdors es necessiten com a mínim cinc generals lleials, per tal que el problema tingui solució. El mètode per a solucionar-lo haurà d'esperar, però, una altra ocasió.

Clemens H. Cap és professor de mètodes formals de la Informàtica a l'Institut d'Informàtica de la Universitat de Zuric.

Teniu aptitud per a les matemàtiques?

La secció de matemàtiques de la Universitat Independent de Moscou organitza cada any un examen d'admissió per tal de seleccionar els candidats més aptes per a les matemàtiques d'entre tots els inscrits. Feu-vos vosaltres mateixos una prova. No cal saber fórmules ni tenir facilitat per al càlcul.

CHRISTIAN BLATTER

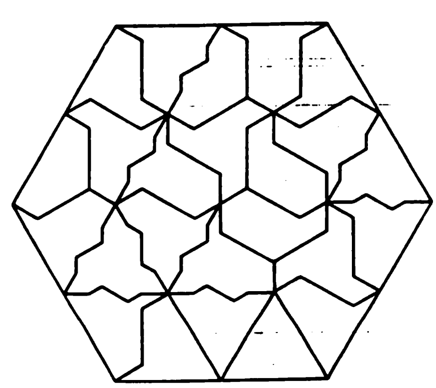
L'examen proposat la tardor de 1991, del qual hem tret el nostre problema, va ser publicat en els *Notices* de la Societat Matemàtica Americana el mes de febrer de 1993; en aquest número dels *Notices* es discutia en general l'estat de les matemàtiques i la situació dels matemàtics a l'antiga Unió Soviètica. Per prendre part en l'examen al qual ens referim calien ben pocs coneixements previs de matemàtiques; així doncs, el problema i el mètode de resolució són fàcils d'entendre i no pressuposen saber fórmules ni ser hàbil calculant. En resum: qualsevol lector pot participar-hi. Us convido a una petita experiència matemàtica. Preparats? Començarem amb la traducció al català d'una traducció a l'alemany d'una traducció a l'anglès de l'enunciat original en rus:

> Un triangle equilàter de costat a es pot recobrir amb 5 triangles equilàters de costat b. Demostreu que és possible recobrir el triangle de costat a amb 4 triangles de costat b.

Ho heu entès? Tingueu en compte que aquest problema anava adreçat als millors alumnes de l'ensenyament secundari, que evidentment coneixien l'argot. Nosaltres, però, serà bo que tornem a formular el problema fent servir un llenguatge més planer.

En els problemes de recobriments, es tracta de tapar completament una figura donada (en el nostre cas, un triangle equilàter de costat a) utilitzant el nombre mínim possible de còpies d'una altra figura (triangles equilàters de costat b). La figura 1 mostra un recobriment d'un triangle equilàter gran mitjançant sis triangles equilàters petits. Observeu que les sobreposicions estan permeses expressament. Problemes d'aquest tipus no només apareixen en els exàmens, sinó també en les matemàtiques avançades (i fins i tot fora de les matemàtiques), i molts d'ells no han pogut ser mai resolts.

Anem per feina! Estem parlant de dues longituds a i b que no ens han pas estat especificades amb nombres concrets. L'única cosa que sabem és que cinc triangles petits són suficients per recobrir el triangle gran. L'enunciat afirma que, en aquesta situació, amb quatre triangles petits de costat b n'hauríem de tenir prou. En sentir-ho per primer cop, costa de creure-ho! Tanmateix, anem a donar-ne una demostració.



Hem de veure que «si cinc són suficients, també ho són quatre»; en altres paraules: «és impossible que es pugui fer amb cinc i no es pugui fer amb quatre». Dit encara d'una altra manera (que és la recíproca de la primera proposició), «*si amb quatre no es pot fer, llavors tampoc no es pot fer amb cinc*».

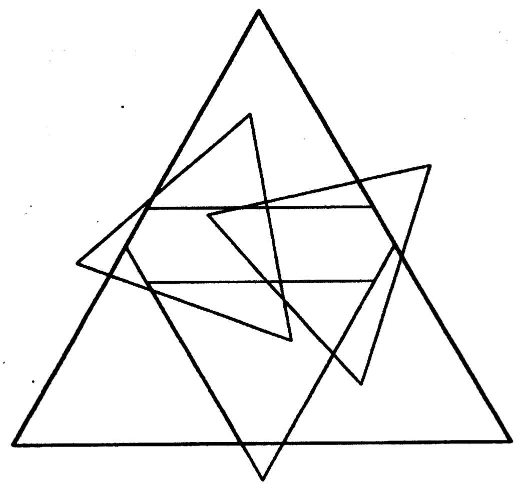


Figura 1

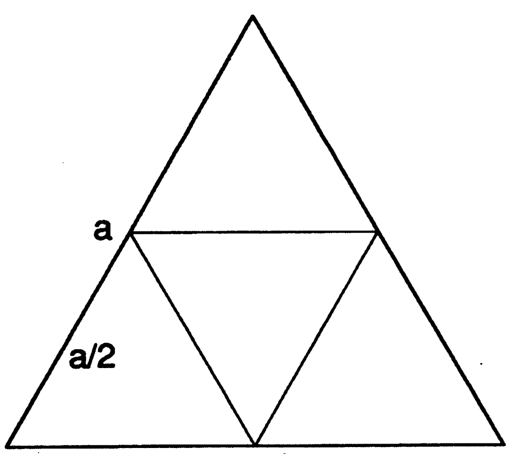


Figura 2

Segur que la figura 2 és a l'abast de tots els participants en aquell examen, i també de la majoria dels lectors. Mostra que un triangle equilàter de costat a es pot recobrir exactament amb quatre triangles equilàters de costat $b = a/2$. Aleshores, amb més motiu es podrà recobrir amb quatre triangles de costat b més gran que $a/2$. D'aquí deduïm que, si el triangle gran no es pot recobrir amb quatre triangles petits, llavors el costat b dels triangles petits ha de ser menor que $a/2$.

Així doncs, l'enunciat en cursiva quedarà demostrat —i el nostre problema resolt— si podem demostrar el següent: en cas que b sigui més petit que $a/2$, cinc triangles no són suficients. Aquí ens cal una demostració d'impossibilitat. Per exemple, suposem que $a = 100$ mm i que $b = 49$ mm. Hem de demostrar que, amb aquestes dades, ni una sola de les moltíssimes maneres imaginables (de fet, infinites) de col·locar els cinc triangles petits damunt del paper recobrirà completament el triangle gran. Les demostracions d'impossibilitat són de les més difícils que hi ha en les matemàtiques. Només cal recordar el temps que es va tardar a demostrar que la quadratura del cercle o la trisecció d'un angle arbitrari amb regle i compàs són impossibles. Des d'un punt de vista filosòfic, la situació és la següent: per demostrar que cap construcció, per més complicada que sigui, realitzada en el si d'una teoria donada no pot resoldre un problema determinat, ens cal disposar d'una altra teoria més potent. Dit d'una altra manera, necessitem un *deus ex machina*.

Per exemple, podríem intentar raonar fent servir l'àrea: si b fos substancialment més petit que a, podria passar que l'àrea conjunta dels cinc triangles petits fos menor que l'àrea del triangle gran. Si es donés aquest cas, llavors seria impossible, evidentment, que els cinc triangles petits recobrissin el gran, de cap manera que els poséssim. No obstant això, aquest raonament no serveix de res si b només és un xic més petit que $a/2$, com en l'exemple numèric anterior. En efecte, si b és igual a $a/2$, llavors l'àrea conjunta de quatre triangles petits és exactament igual a l'àrea del triangle gran (figura 2). Si b només és lleugerament més petit que $a/2$, llavors l'àrea conjunta de quatre triangles petits és gairebé igual a l'àrea del triangle gran, i l'àrea del cinquè passa ben bé del que hi falta.

L'àrea és un criteri massa global. És clar que necessitem una eina que tingui en compte la forma i la posició de les figures implicades. Si feu uns quants assaigs amb cinc triangles de costat un xic inferior a $a/2$, aviat veureu que cada vegada teniu dificultats per tapar, o bé els tres vèrtexs del triangle gran, o bé els punts mitjans de les tres arestes. Anem a treure suc d'aquesta observació.

Atenció! Ara ve el pas definitiu. A la figura 3 hem marcat els sis punts esmentats del triangle gran. La distància entre dos qualssevol d'aquests punts és com a mínim $a/2$. D'altra banda, la separació màxima possible entre dos punts del triangle petit és igual a la llargada del costat b, que és menor que $a/2$ per hipòtesi. Així doncs, cadascun dels triangles petits pot tapar com a molt un dels sis punts marcats, i per tant, és impossible que cinc triangles petits puguin tapar tots sis punts. D'aquesta manera hem demostrat que el triangle gran no es pot recobrir amb els cinc petits.

Tal com ha de ser, acabarem aquesta lliçó proposant un exercici. Recobriu el quadrat gran de la figura 4 amb tres còpies del quadrat petit. (Indicació per als qui ho vulguin intentar: la proporció entre el costat petit i el gran és de 0,78615 a 1.)

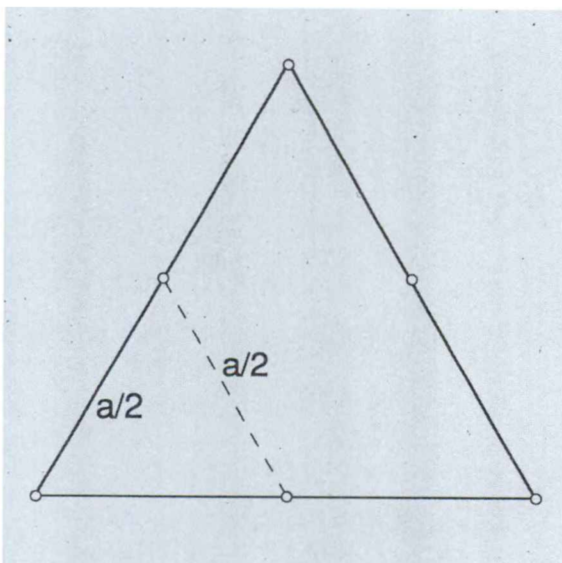


Figura 3

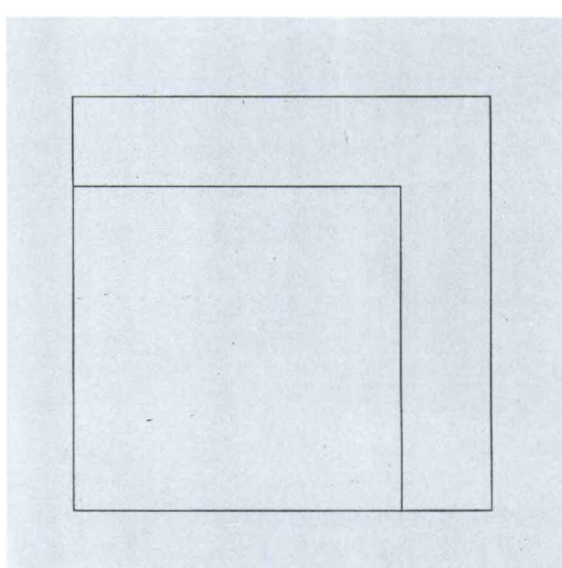


Figura 4

Christian Blatter és professor a l'ETH de Zuric.

Guaita, quina idea! La història d'una descoberta

Can one hear the shape of a drum?, va preguntar el matemàtic americà Marc Kac l'any 1966. La resposta va trigar vint-i-cinc anys i és un exemple únic de com una idea matemàtica es pot desenvolupar gràcies a una sèrie d'aportacions provinents de camps ben diferents.

PETER BUSER

Els vasos, les tasses, o un tren que s'acosta: hi ha molts objectes que podem identificar pel soroll que fan, sense necessitat de veure'ls. Fins i tot algunes coses es poden percebre per l'oïda molt abans que es manifestin visualment, com per exemple les esquerdes a la ceràmica.

Les ones sonores són produïdes per les vibracions d'un cos i poden ser descrites matemàticament. Les freqüències obtingudes formen el que s'anomena *l'espectre*. Per exemple, la figura 1 mostra les primeres 20 freqüències de l'espectre d'una làmina plana. A la figura 2 s'ha modificat un xic la forma de la làmina; la deformació es manifesta clarament en l'espectre. Experiments molt detallats han demostrat que fins i tot variacions insignificants de la forma de la làmina alteren l'espectre. Això va portar, finalment, Kac i altres matemàtics dels anys seixanta a sospitar que potser la forma global d'una figura plana es troba codificada d'alguna manera en l'espectre. Dit d'una altra manera, «*can one hear the shape of a drum?*» (es pot oir la forma d'un timbal?).

Avui se sap que la resposta no és pas afirmativa en tots els casos. La figura 3 mostra, com a contraexemple, dos dominis isospectrals, és a dir, dues regions planes que tenen exactament el mateix espectre. Com es varen arribar a descobrir, aquestes formes? Tal com explicarem, va caldre una llarga cadena de troballes i circumstàncies, que es remunta fins a l'any 1880.

La recerca de contraexemples va començar aviat. L'any 1964, John Milnor, de l'Institut d'Estudis Avançats de Princeton, ja havia construït dos objectes isospectrals (dos *tors*) combinant peces de cristall. Però de setze dimensions! De fet, des del principi es va veure que era més senzill treballar amb dimensions grans; va passar més d'una dècada fins que, finalment, la matemàtica francesa Marie-France Vignéras va aconseguir trobar els primers exemples de dimensió dos (unes certes *superfícies de Riemann*). Tanmateix, aquests exemples eren tan complicats que els tors de Milnor semblaven inofensius al seu costat. Per representar-los caldria dibuixar dues figures tubulars amb molts milers d'anses cadascuna! Com que jo m'havia doctorat amb espectres de superfícies de Riemann, vaig començar a interessar-me per la construcció d'exemples més simples, però al principi no en vaig pas treure l'aigua clara.

Una analogia sorprenent

L'estiu de 1983, enmig dels exàmens, vaig rebre el manuscrit d'un treball de Toshikazu Sunada, de la Universitat de Nagoya al Japó, que em va tenir ocupat molt de temps. Sunada havia descobert un lligam amb un problema de teoria de nombres que el famós matemàtic Leopold Kronecker havia plantejat cent anys abans (per ser precisos, l'any 1880). El problema tractava de *cossos de nombres algebraics*, i es va resoldre l'any 1926 fent servir teoria de grups. Hi intervenien cadenes infinites de nombres. Un bon dia Sunada es va adonar d'una analogia sorprenent entre aquestes cadenes de nombres i els espectres, i se li va ocórrer d'intentar veure si la solució del problema de Kronecker podia aportar alguna cosa útil a la construcció d'exemples isospectrals.

En el seu treball, Sunada va construir una sèrie d'exemples nous on apareixien superfícies de Riemann de gènere disset (el gènere és el nombre d'anses). Per tal d'aconseguir un gènere encara més petit, jo vaig començar a treballar amb fi-més petit, jo vaig començar a treballar amb figures fetes enganxant *polígons no euclidians* (com a les figures 1 i 2), i així vaig reduir el gènere a cinc. Actualment posseeix el rècord un col·lega meu, Robert Brooks, de la Universitat de Califòrnia del Sud, amb gènere quatre. Potser és aquest el mínim valor possible. Malgrat tot, però, el mètode de Sunada no aportava res de nou per a regions del pla.

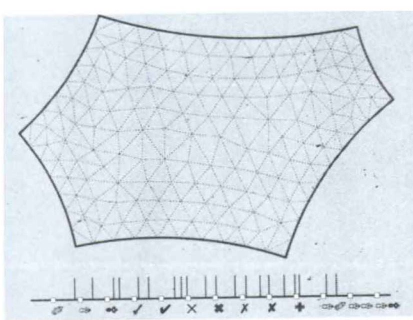


Figura 1. Un polígon no euclidià com a làmina vibrant. La triangulació serveix per als càlculs numèrics. L'escala mostra les vint primeres línies de l'espectre.

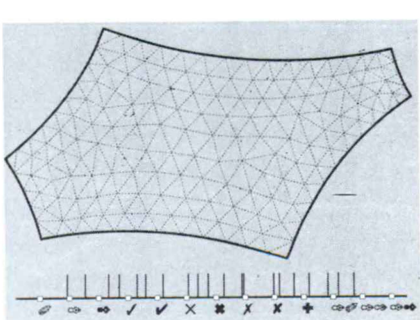


Figura 2. Aquí s'ha modificat un xic la forma de la làmina de la figura 1. La deformació es manifesta en l'espectre.

Un cafè que va tenir conseqüències

Una tarda estàvem prenent cafè el meu col·lega Heinrich Matzinger i jo. Mentre li anava explicant les meves subtileses, va posar de sobte una nova peça en joc. Pensant encara en les seves classes de física matemàtica, va preguntar: «es poden realitzar a l'espai, les teves superfícies?» «No», vaig respondre-li; «les superfícies de Riemann no es poden pas representar a l'espai sense estirar-les, i si les estirem es perd la isospectralitat». Però ja havia estat pronunciada la paraula clau, *espai*, per a la qual jo no havia tingut cap interès fins aleshores, i que ja no em vaig poder treure del cap. Què hi ha, que es pugui doblegar però no estirar? Mentre pujava l'escala cap al meu despatx em va venir la idea: el paper, evidentment! I vet aquí que em vaig estar fins al vespre remenant paper, tisores i cinta adhesiva, fins que vaig acabar-les: les dues primeres superfícies isospectrals de l'espai. I per primera vegada autènticament fabricades a mà!

Tanmateix, el model de paper era un xic complicat i no em va pas entusiasmar. Per sort, Robert Brooks va trobar després un model més senzill a partir de les seves superfícies de gènere quatre. Simplificant encara més el seu model, vaig obtenir les dues formes de la figura 4. Si hagués estat permès d'estirar-les, les hauríem pogut fins i tot desplegar en el pla sense cap creuament. Així doncs, aquest model s'acostava força a la solució del problema de Kac, però durant molt de temps ningú no es va adonar de fins a quin punt s'hi acostava.

La meitat és més que el tot

A principis de l'estiu de 1991, Carolyn Gordon, professora de la Universitat de Washington (Saint Louis, Missouri), va impartir una conferència davant de la Societat Matemàtica Americana. Va fer un repàs molt engrescador del desenvolupament del tema dels exemples isospectrals, des dels tors de Milnor fins a les deformacions isospectrals de *grups de Lie* que ella mateixa havia descobert. Entre d'altres, va exhibir els dos models de paper de la figura 4. A l'audiència, hi era Scott Wolpert, de la Universitat de Maryland, un expert en teoria espectral. En tornar a veure aquells models a la mà de Carolyn Gordon, va copsar un detall decisiu, encara que ben simple: cadascuna de les dues figures es pot aixafar en dues meitats, l'una damunt l'altra, com si anéssim a plegar un jersei. Aquestes meitats són figures planes. Podria ser que fossin isospectrals?

En aquella ocasió la pregunta va quedar sense resposta. Varen passar moltes setmanes fins que Carolyn Gordon, conjuntament amb el seu marit David Webb (que també és matemàtic) va apropar-se a la solució després d'uns quants intents poc reeixits.

A començament de juliol, altra vegada enmig dels exàmens orals, vaig tenir a la mà a l'hora de dinar un manuscrit del treball de Gordon, Webb i Wolpert, on el resultat era esbossat, encara sense demostració. No em podia creure que fos possible arribar al nostre objectiu senzillament tallant per la meitat. Mentre jo tornava als exàmens, un col·lega meu es va dedicar a comprovar el resultat amb l'ordinador. Les primeres deu línies de l'espectre coincidien exactament fins al sisè decimal. No hi havia cap dubte: els dos dominis eren isospectrals; el problema de Kac estava resolt! Un parell de dies més tard vàrem trobar fins i tot una demostració molt senzilla, mitjançant una mena de trasplantament, amb el meu col·lega Klaus-Dieter Semmler.

Han quedat obertes moltes qüestions. John Conway i Peter Doyle, de la Universitat de Princeton, han regirat de dalt a baix l'atlas de grups finits (sí, n'hi ha un!) i han trobat molts altres dominis isospectrals plans. Els dos gats de la figura 3, els varen trobar ells. Quants exemples com aquests poden existir? Pot haver-hi altres construccions que no estiguin basades en la teoria de grups? Quines propietats geomètriques es poden llegir realment a l'espectre? I moltes altres preguntes.

Una darrera observació: tots els exemples plans coneguts fins ara tenen angles. Tanmateix, de bell antuvi, Kac estava pensant en dominis amb vora llisa; així doncs, el problema encara no està pas totalment resolt. Però de la idea que cal per acabar el que falta, encara no us en puc pas contar res.

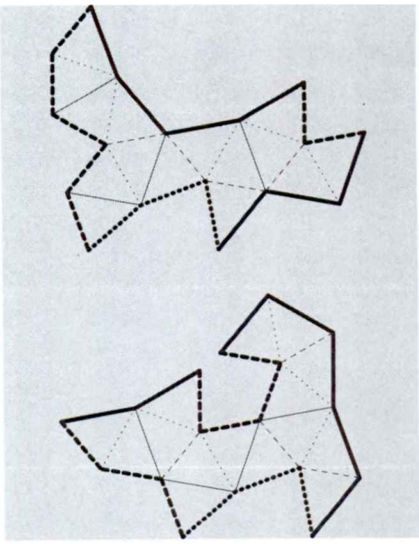


Figura 3. Dos dominis isospectrals del pla, constituïts per triangles idèntics.

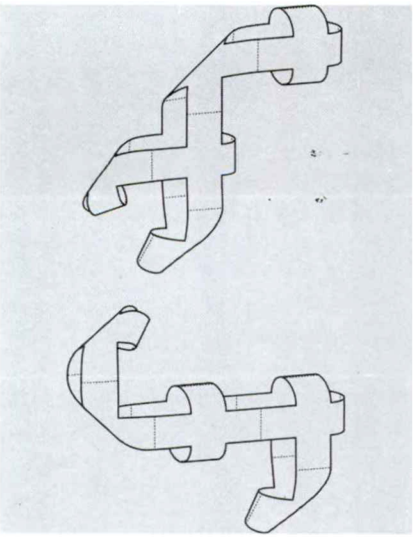


Figura 4. Dues superfícies isospectrals de l'espai, constituïdes per creus helvètiques.

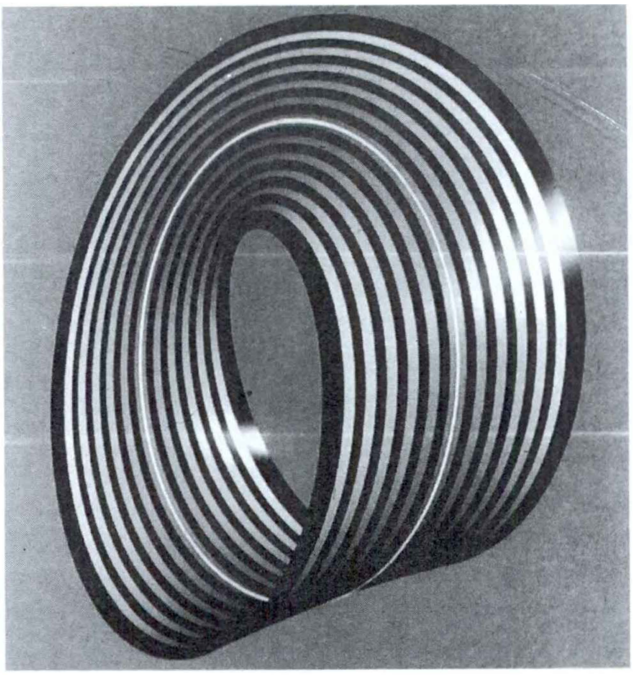
Peter Buser és professor de matemàtiques a l'EPF de Lausana.

Visualització de la matemàtica

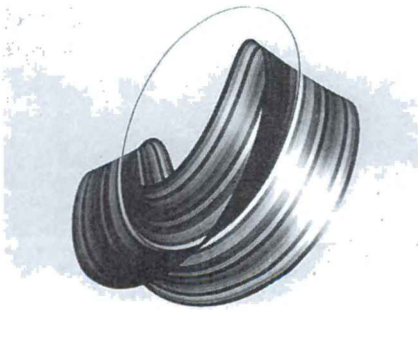
L'oblidada tradició de visualitzar la matemàtica reviu avui mercès als gràfics per ordinador. Entre els exemples de tals imatges, les que il·lustren, en el domini de la geometria algebraica, l'important procés anomenat *esclatament*, permeten apreciar, fins i tot als no-matemàtics, la riquesa de la matemàtica.

MARKUS BRODMANN

La recerca sistemàtica de les anomenades *superfícies algebraiques* va començar a la segona meitat del segle passat, en part pels treballs pioners del matemàtic bernès Ludwig Schläfli, i tal vegada l'abundància de formes que s'anaven descobrint va propiciar l'ocasió de visualitzar-les mitjançant distints models. Molts d'aquests models es van construir amb guix. També es varen produir models plegables de paper, models de fusta i els anomenats *models de Paden*. Lamentablement, molts dels models varen desaparèixer dels arxius de l'Institut de Matemàtiques en el decurs del temps, o varen romandre totalment oblidats. Paral·lelament, la matemàtica va cultivar cada cop menys aquesta tradició de visualització.



Ambdós gràfics, generats per ordinador, representen esclataments. Mitjançant un tal procés el centre d'una fulla circular s'expandeix, o «esclata», en una recta.



La vella tradició torna a viure

Avui aquesta oblidada tradició s'ha revifat gràcies a les múltiples capacitats dels gràfics per ordinador. Naturalment, un objecte matemàtic no es pot veure tan bé, estrictament parlant, amb una imatge bidimensional com mitjançant un model espacial. Aquesta mancança de la imatge bidimensional esdevé, però, àmpliament compensada mitjançant les múltiples prestacions que els ordinadors actuals ofereixen.

Aquesta forma d'il·lustració d'objectes matemàtics, a la frontera entre ciència i art, pot donar lloc a una estimulant trobada entre matemàtics i no-matemàtics. El no-matemàtic obté una impressió visible de la bellesa pròpia dels objectes matemàtics. Pot, així, copsar una part de la fascinació emanada per l'ordre i la claredat interna de les teories matemàtiques. Per altra banda, el matemàtic aprèn a veure els objectes de la seva recerca des d'un altre punt de vista, amb la qual cosa sovint es veu sorprès pels diversos atractius estètics que inesperadament es manifesten. Endemés, amb aquestes noves formes d'observació potser atenyi, insospitadament, inspiracions pel seu propi treball.

Generació de les imatges

Presentarem algunes imatges generades per ordinador en un treball conjunt amb l'Institut d'Informàtica de la Universitat de Zuric, les quals visualitzen (en un cas especial molt senzill) un procés molt important per a la geometria algebraica —el procés d'*esclatament*.

Per tal d'explicar aquest procés, i ensems la forma de generar les imatges, considerem la superfície S definida per l'equació $x = yz$, això és, el conjunt dels punts de l'espai les coordenades x, y, z dels quals compleixen la relació $x = yz$. Es tracta així d'una superfície algebraica, és a dir, d'una superfície els punts (x, y, z) de la qual són els que compleixen una equació algebraica donada. Convé dir, però, que la noció de superfície algebraica és més general, ja que comprèn «superfícies» que no es poden realitzar com a superfícies de l'espai de dimensió 3. Si $x \neq 0$ i $y = 0$, llavors és clar que no hi ha cap valor de z que satisfaci l'equació. Dit en termes més gràfics: no hi cap punt de l'eix de les x (llevat el punt d'intersecció dels tres eixos) sobre del qual hi hagi algun punt de la superfície S. D'antuvi, aquesta manca es pot adobar d'una manera purament formal si admetem un valor addicional de z que designarem amb el símbol ∞. Suposarem que la nostra equació es compleix sempre per $y = 0$ i $z = \infty$, afegint així a la superfície S els «punts a l'infinit» que en coordenades s'escriuen $(x, 0, \infty)$. Aquests punts formen una «recta a l'infinit» que resta sobre l'eix de les x.

Per tal d'entendre aquesta operació formal d'una manera geomètrica satisfactòria, ens cal precisar com s'adjunta a la superfície S l'esmentada «recta a l'infinit». A tal fi només ens cal dir com s'adjunta un «punt a l'infinit» a una recta. Això, ho farem de forma que ens acostem a aquest punt indefinidament, quan des d'un punt arbitrari de la nostra recta ens movem constantment seguint la seva direcció. La recta completada d'aquesta forma s'anomena ***recta projectiva*** i la denotem amb el símbol $\mathbf{P}^1$. En termes gràfics, per aquest procés de compleció amb un «punt a l'infinit», que es pot realitzar com a la figura 1, la nostra recta original es tanca en una circumferència.

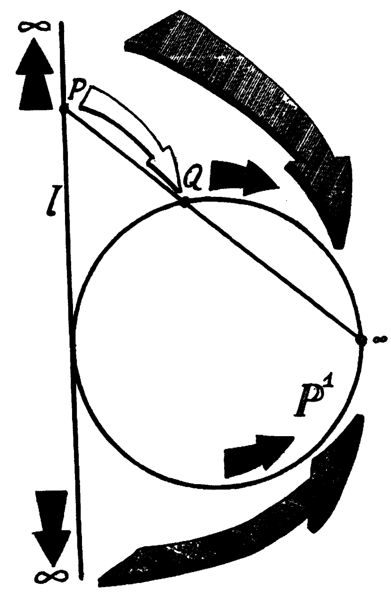


Figura 1

Ara volem emprar el procés de compleció que acabem d'explicar per tal de tancar la superfície S mitjançant «els seus punts a l'infinit» (figura 2). Per obtenir una imatge satisfactòria, escollim un disc D en el pla xy, que denotarem amb el símbol E, i considerem només la part S de la superfície S que resta sobre D. Considerem també una recta $\boldsymbol{a}$ del pla E que no talli el disc D. Donat un «punt base» F arbitrari dins el disc D, considerem el seu simètric F_∞ respecte de la recta $\boldsymbol{a}$. Llavors podem completar la recta l_F que passa per F i és paral·lela a l'eix de les z, pel procediment que hem explicat, en una recta projectiva $\mathbf{P}^1_F$.

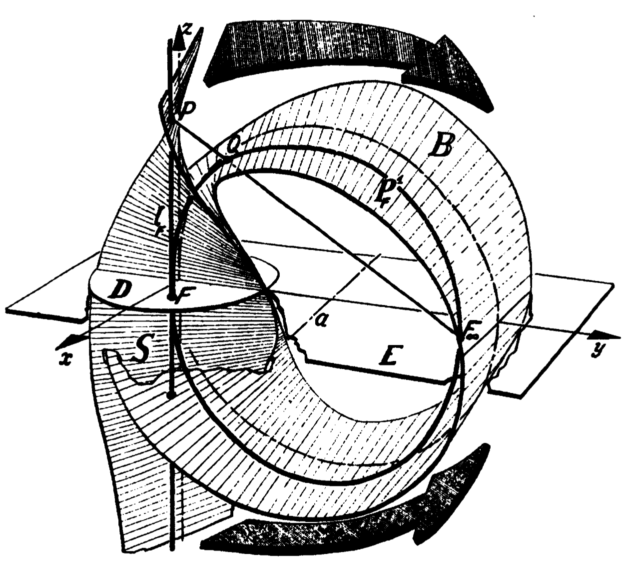
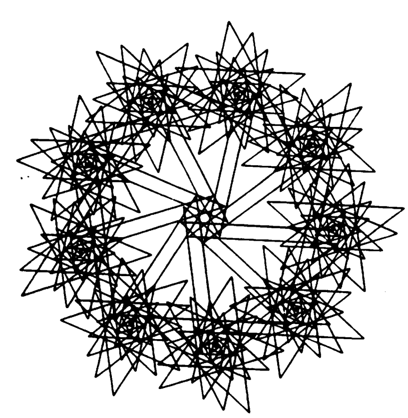


Figura 2

A cada punt P comú a la recta l_F i a $\mathbf{S}$ li correspon un punt Q. Si F és un punt de l'eix de les x, admetem F_∞ com a possible punt Q. Si ara deixem que el punt F recorri el disc $\mathbf{D}$, el conjunt dels corresponents punts Q formen una superfície $\mathbf{B}$, que, de fet, és una banda de Möbius. Intuïtivament $\mathbf{B}$ s'obté «tancant a l'infinit» la «banda torçada» S.

El que just acabem de descriure gràficament es correspon amb el procés d'*esclatament* del disc $\mathbf{D}$. Aquest procés es pot també efectuar quan l'equació inicial $x = yz$ es canvia per d'altres més complicades, com ara $x^2 = y^2z$, $x^3 = yz$, $x^2 + y^3 = y^2z, \cdots$. En casos com aquests el procés subministra, naturalment, superfícies més complicades que la banda de Möbius, com, per cert, també ho mostren els gràfics d'ordinador.

En tots aquests exemples, i dit intuïtivament, el centre del disc $\mathbf{D}$ és distanciat i substituït per una recta projectiva, això és, per una circumferència. La manera d'engalzar aquesta circumferència amb el disc en el lloc de l'allunyat centre, depèn de l'equació escollida. La idea intuïtiva segons la qual un punt (en el nostre cas el centre del disc $\mathbf{D}$) s'engruixeix, o es dilata, en una recta sencera és la raó per la qual el procés descrit s'anomena *un esclatament*. El procés d'esclatament de la geometria algebraica es defineix, però, amb molta més generalitat i usualment es trasllada a situacions en què la visualització directa no és possible per raons de dimensió. Així doncs, amb les nostres imatges ens movem per la «vora més baixa» del camp de tots els esclataments. Però només amb això ja es pot entreveure quelcom de la riquesa del domini en el qual hem fet una primera ullada.



Markus Brodmann és professor a l'Institut de Matemàtiques de la Universitat de Zuric.

Els models matemàtics són insubornables

Les consideracions matemàtiques abstractes juguen un paper important en les ciències de la natura, la medicina, l'enginyeria, l'economia, les ciències socials i, darrerament, també en les finances. D'aquesta mena de lligams, se n'aprofiten les dues bandes: d'un costat, la matemàtica contribueix a una millor comprensió de fenòmens complexos de l'experiència i, de l'altre, d'aquests contactes, en recull inspiracions per al seu propi desenvolupament. L'autor presenta exemples del seu domini de recerca.

HERBERT AMANN

A mitjan dels anys vint d'aquest segle, el biòleg italià U. D'Ancona va observar que els estats d'equilibri biològics naturals de les poblacions de peixos podien ser modificats per les empreses pescadores. Recerques estadístiques, fetes entre 1910 i 1923, dels mercats de Venècia, Trieste i Fiume, en què es descarregaven pràcticament totes les captures de l'alt Adriàtic, van mostrar fluctuacions considerables en la varietat i freqüència de les espècies pescades. Durant els anys de la guerra, que van ocasionar una reducció considerable de la pesca, va augmentar significativament la proporció de peixos predadors —com ara taurons o rajades—, que viuen de varietats de peix més petites. El nombre de peixos comestibles, en canvi, que viuen d'invertebrats i plantes, i que són la presa dels depredadors, va minvar. D'Ancona va concloure que la reculada de les flotes de pesca en el període 1914-1918 havia dislocat passatgerament l'equilibri biològic de l'alt Adriàtic a favor dels predadors, però, per altra banda, no va saber donar una explicació satisfactòria d'aquest fenomen.

El sistema predadors-preses

Vers 1925 el conegut matemàtic italià Vito Volterra, incitat per converses amb D'Ancona, va començar a preguntar-se si seria possible de trobar una explicació de les esmentades oscil·lacions mitjançant mètodes matemàtics. Per a les seves consideracions va ser fonamental adonar-se que en la lluita per la supervivència concorrien dues classes de peixos. Per això va agrupar els peixos de l'alt Adriàtic en dues classes, la dels depredadors i la de les preses, i mitjançant un petit nombre de premisses senzilles va derivar un sistema de dues equacions diferencials que descrivien l'evolució temporal d'ambdues poblacions. Una anàlisi d'aquestes equacions mostra un augment i una disminució periòdics dels depredadors i de les preses, variacions que essencialment són de signe contrari per les dues classes. Si a l'instant t representem la població de preses per $p(t)$ i la de depredadors per $d(t)$, podem considerar el parell $P(t) = (p(t), d(t))$ com un punt del pla, el qual en el decurs del temps descriu una corba tancada K en el sentit contrari del de les busques del rellotge (figura 1).

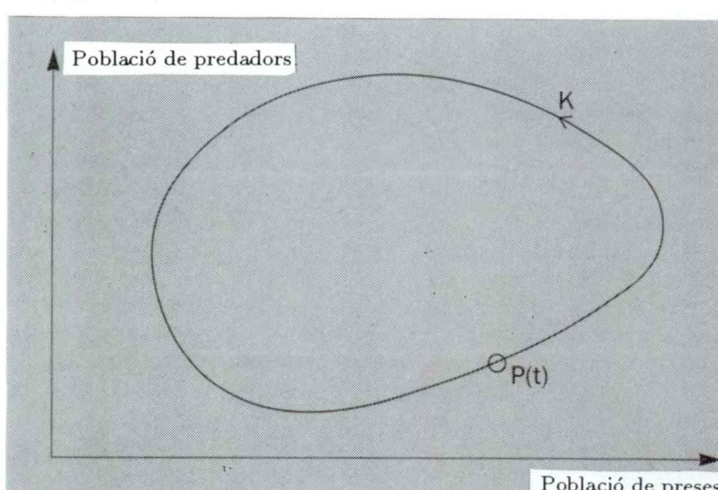


Figura 1

Descoberta la periodicitat mitjançant l'anàlisi matemàtica de les equacions diferencials, aquest estat de coses es pot interpretar fàcilment. Quan el nombre de predadors augmenta, més preses són devorades i, per tant, el seu nombre disminueix. Llavors, havent-hi menys provisions per als predadors, la seva taxa de mortalitat augmenta, amb la qual cosa la seva població disminueix. Com que menys depredadors necessiten menys aliment, la població de preses pot multiplicar-se tranquil·lament, i aquest augment comporta un augment dels predadors. Després d'un cert temps trobarem un alt nombre d'aquests i de les seves preses, amb la qual cosa el cicle pot començar de nou.

Tals oscil·lacions periòdiques en sistemes depredadors-preses s'obtenen d'unes poques hipòtesis naturals sobre la coexistència i les raons de variació de les dues poblacions. És clar així, que apareixeran en qualsevol sistema concurrent que es pugui modelar per equacions similars, independentment de la corresponent interpretació de les variables matemàtiques. En particular, apareixen variacions periòdiques amb independència d'influències externes, com ara les ocasionades per la pesca.

És evident que les influències externes se superposen a les variacions naturals i poden afavorir o perjudicar una o altra població. Així, podria semblar que la intensificació de la pesca perjudicarà les dues poblacions, de forma que la mitjana de predadors i preses disminuirà i el cicle anterior es reprendrà a un punt inferior, això és, amb grandàries d'ambdues poblacions disminuïdes.

No obstant això, l'anàlisi matemàtica de les equacions obtingudes per Volterra mostra que la regla anterior, basada en el sentit comú, és falsa. En efecte, si es redueix la raó de creixement de les dues poblacions en una proporció fixa no gaire gran —com ho comporta una captura equilibrada de totes les espècies—, obtenim el resultat paradoxal constatat segons el qual la mitjana de predadors disminuirà i la de preses augmentarà. Per contra, una reducció de la pesca beneficia els depredadors i disminueix la quota dels peixos comestibles —com, de fet, succeí durant la primera guerra mundial al mar Adriàtic.

Aquest resultat sorprenent i remarcable, conegut com el principi de Volterra, també es va confirmar quan es van introduir els insecticides. Això vol dir que quan es fa ús de productes per a exterminar insectes que tenen efecte tant sobre els insectes predadors com sobre les seves preses, el creixement de les poblacions d'aquests es veurà afavorit allà on abans era controlat pels seus congèneres. Això es pot il·lustrar amb el cas del pugó del cotó, un insecte que va ser importat d'Austràlia, a través de l'Amèrica del Nord, a la segona meitat del segle passat. Com que a Austràlia arruïnava els cultius de llimoners, es va importar també el seu adversari natural, una mena de marieta, i així la seva població es va reduir aviat a un nivell més baix. Amb la introducció del DDT s'esperava fer baixar aquest nivell encara més. El que va passar, però, allà on es va emprar aquest insecticida, fou que el pugó es va multiplicar millor que abans —d'acord amb el principi de Volterra.

El paper dels models matemàtics

El sistema predadors-preses és un model matemàtic molt senzill, i dràsticament simplificat, que avui només té valor històric i com a il·lustració. Malgrat que algunes suposicions que conté no resisteixen una crítica seriosa, és precisament a causa de la seva simplicitat i accessibilitat que pot servir per a perfilar una part del paper que la matemàtica juga en la descripció de fenòmens complexos.

– Els models matemàtics són universals. Es poden aplicar a situacions concretes d'orígens diversos, independentment del significat, en cada cas particular, de les variables per investigar. Per exemple, els sistemes de predadors-preses, o les seves generalitzacions i millores, poden contribuir a la comprensió de fenòmens tan diferents com el problema de la pesca ja esmentat, la propagació d'epidèmies o fenòmens de les reaccions químiques.

– Els models matemàtics dirigeixen la mirada sobre el que és essencial i obren un camí envers qüestions pertinents a través de la jungla de la diversitat. Així, per exemple, per a l'aclariment de les observacions de D'Ancona, Volterra va extreure els enunciats que necessitava dividint la totalitat d'éssers marins de l'alt Adriàtic només en dues classes, la dels depredadors i la dels depredats.

– Atès que no es deixen dur a l'error pel sentit comú, els models matemàtics són insubornables. Poden així conduir a resultats totalment inesperats que permeten que un problema donat es pugui veure amb una llum nova, com ho documenta perfectament el paradoxal principi de Volterra.

La matematització progressiva de les ciències de la natura, i també de la medicina, l'economia i les ciències socials, confronta tot el nostre món de l'experiència a preguntes i models més i més complexos, els quals han d'assolir demandes cada vegada més altes. En el cas del model predadors-preses, ha estat suficient que consideréssim l'evolució temporal de les mitjanes de les dues poblacions, i això ens ha dut a dues senzilles equacions diferencials ordinàries. En models més realistes s'han de considerar també, a més de l'evolució temporal, les interaccions espacials, com ara les dels processos de difusió. Això significa que en lloc d'equacions diferencials ordinàries tindrem equacions diferencials en derivades parcials. El maneig rigorós d'aquestes no és fàcil i és, especialment en el domini de les equacions no lineals, que són les que intervenen en gairebé tots els models realistes, l'objecte d'investigacions actuals. Es pot obtenir una idea de l'augment de dificultat, en passar d'equacions diferencials ordinàries a equacions en derivades parcials, si tenim present que en el cas ordinari només s'ha de determinar un nombre finit de quantitats desconegudes (per exemple, la variació temporal de les poblacions de predadors i preses), mentre que en el cas d'equacions en derivades parcials s'han de controlar infinites quantitats (per exemple, la variació temporal de la temperatura a cada punt d'un cos o d'un corrent).

Naturalment, els models matemàtics seriosos de situacions complicades es basen, en gran mesura, sobre lleis físiques conegudes, i no sobre regles del sentit comú, i no els podrem explicar, ni de bon tros, en el marc d'aquest article. No obstant això, intentarem, mitjançant els exemples que segueixen, de proporcionar al lector una introducció a aquesta mena de problemes i al paper que hi juga la matemàtica.

Subministrament d'oxigen als òrgans d'animals de sang calenta

A Dortmund, a l'Institut Max Planck de Fisiologia de Sistemes, s'investiguen els processos d'intercanvi entre els capil·lars i els teixits d'organismes de sang calenta. Per exemple, té interès de saber sota quines condicions està garantit un subministrament òptim d'oxigen a les ***mitocòndries***, o com es podria posar remei a una possible deficiència d'aquest subministrament. A tal fi, d'una banda es fan experiments, i de l'altra s'intenta deduir enunciats dels models teòrics. Ocasionalment, per comparació dels resultats dels dos procediments, es poden descobrir propietats del corresponent sistema biològic (figura 2).

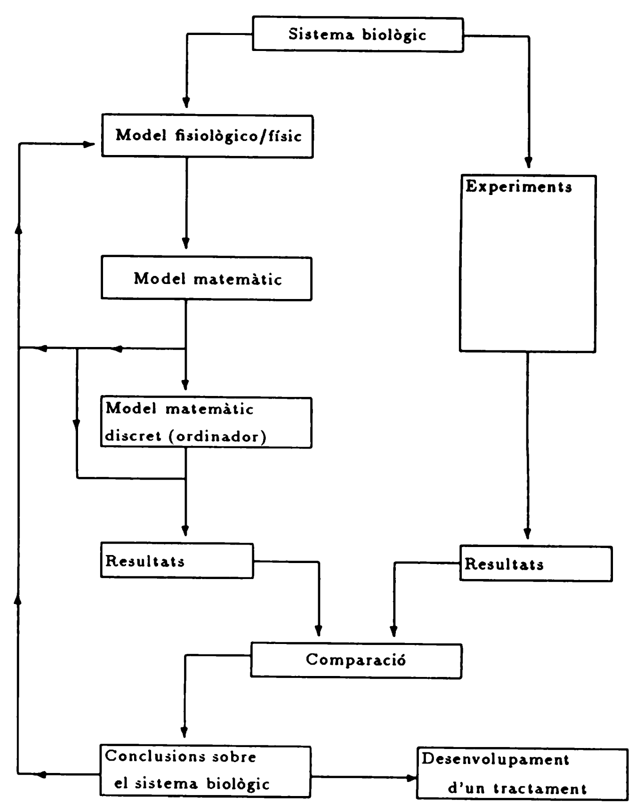


Figura 2

Aquesta forma de procedir és típica de molts dominis en què es volen extreure conclusions de models i experiments. Tot seguit es construeix, a partir del sistema biològic i regint-se per criteris fisiològics, físics, químics i morfològics, un model fisiològico-físic, de la qual resulta un model matemàtic. En el cas que ens ocupa s'obté un sistema complicat d'equacions en derivades parcials no lineals. Per tal de poder disposar de dades explícites que es puguin comparar amb les dades experimentals, a la pràctica hom es veu forçat, en tots els casos, de recórrer a un altre model que sigui apte per al tractament numèric —el qual es coneix com a model discret.

Les equacions diferencials, especialment si són complicades, en general no es poden resoldre de forma que obtinguem expressions matemàtiques (funcions) que les compleixin i de les quals es pugui inferir tota la informació que desitgem. És un dels mèrits de la matemàtica, però, que faci possible, basant-se en investigacions teòriques, de treure conclusions sobre el comportament de les solucions de les equacions sense necessitat de resoldre-les realment. Les preguntes fonamentals són, sense dubte, les que demanen per a la bona fonamentació i estabilitat dels problemes. Quan hom considera que ja s'ha fet el primer pas, havent produït un model de la realitat, i que, al seu torn, d'aquest s'ha passat a un segon model, el matemàtic, llavors esdevé clar que al llarg del camí hi ha tota mena de perills. Per exemple, un d'ells és considerar certs aspectes com a secundaris i negligir-los en benefici d'un model més senzill, tot i que potser contribueixen indirectament, de forma considerable, al fenomen estudiat. Un altre és el perill de fer suposicions que duen a conseqüències contradictòries que no s'havien pogut preveure en la fase de modelització. Aquests casos es descobriran, en general, en el model matemàtic, el qual llavors contindrà, per exemple, equacions incompletes, o que no tenen solucions o en tenen massa, en una paraula, contindrà equacions mal fonamentades. D'aquesta forma, els sistemes matemàtics inestables es caracteritzen pel fet que petites variacions en els paràmetres (arranjaments experimentals) o en les dades comporten grans desviaments dels resultats corresponents.

Un aclariment satisfactori de qüestions teòriques com aquestes no només té significació pel model fisiològico-físic, el qual s'ha de repensar i modificar si li manca estabilitat o bona fonamentació, sinó també per al tractament numèric de les equacions. Els models realistes generen, quan es discretitzen, sistemes de moltes equacions amb centenars, per no dir milers, d'incògnites que posen problemes fins i tot als més potents ordinadors d'avui. Un ordinador, en què s'han introduït les dades i els programes de càlcul, (quasi) sempre subministra resultats, val a dir solucions, fins i tot en casos en els quals les equacions inicials no discretitzades no en tenen cap! Quan es considera el nombre astronòmic d'operacions que un superordinador fa per segon i es té en compte que els nombres de l'ordinador només consten d'un petit nombre de dígits, de forma que en cada operació es produeixen errors d'arrodoniment, no és sorprenent que els nombres de sortida puguin trobar-se —fins i tot si es presenten atractivament amb tècniques gràfiques actuals— lluny de la realitat. Aquest és el cas, especialment en els problemes inestables, on petits errors d'arrodoniment poden tenir conseqüències catastròfiques. Quan per recerques teòriques es pot mostrar que les equacions del model matemàtic inicial no són contradictòries i que admeten una solució, i quan a més a més es pot garantir que la solució és única i estable, llavors hem fet un gran pas endavant. De fet, els enunciats d'aquesta mena són fonamentals per a obtenir fites de l'error que ens assegurin que els resultats donats per l'ordinador representen amb bona aproximació la realitat i no una solució il·lusòria.

En el cas de model de transport d'oxigen precedent, algunes de les qüestions matemàtiques esmentades es poden resoldre satisfactòriament. Això es pot atribuir al fet que el model fisiològico/físic es basa sobre la teoria clàssica de la difusió, amb la qual cosa es pot descriure amb una classe d'equacions diferencials que s'han estudiat extensivament en els darrers trenta anys. El cas que segueix, en canvi, és un problema extraordinàriament actual que ens mena fins a teories físiques no clàssiques de la difusió.

Les noves tècniques de medicació

Els mètodes convencionals de tractament de malalties amb medicaments consisteixen predominantment en l'administració de pastilles, pomades, gotes i injeccions intravenoses. En temps recents es treballa intensivament en el desenvolupament de nous mètodes de medicar.

Després d'administrar un medicament per un mètode convencional, en general augmentarà la seva concentració a la sang, fins a assolir un màxim, i després disminuirà fins a esvair-se. Com que cada medicament té un marge d'efectivitat, per sota de la qual és innocu i per sobre tòxic, les oscil·lacions de concentració poden comportar que s'alternin períodes d'intoxicació amb d'altres en que és inoperant.

Les noves tècniques permeten que una única dosi del medicament es lliuri controladament al cos, a una velocitat constant, durant un període prèviament determinat (d'hores, dies o anys) i eviten així les dites oscil·lacions. Permeten també, endemés, localitzar el lliurament a una part determinada del cos, amb la qual cosa és possible evitar que afecti els òrgans veïns sans. Altres profits són la reducció de la necessitat de tractaments continuats, l'augment del benestar general del pacient i l'eliminació dels factors personals (com per exemple, l'administració irregular de pastilles).

Un dels mètodes consisteix a incorporar el medicament en un polímer que després es col·loca al lloc del cos desitjat. Llavors el material polimèric lliura el medicament per difusió, reaccions químiques o processos de dissolució. Per tal de poder controlar la intensitat i duració del lliurament, la bona comprensió dels corresponents processos de difusió té una importància fonamental. Diguem només que es tracta de complicats desgastos pels quals la difusió ocasiona canvis mecànics del polímer, els quals al seu torn repercuteixen sobre els processos de difusió. Avui encara no es disposa de cap teoria física segura d'aquesta difusió visco-elàstica no clàssica en els polímers. És per aquesta raó que s'intenta desenvolupar, a partir de bases fenomenològiques, models matemàtics que permetin descriure aquests processos. Així es van inferir, com ara a l'Institut de Tecnologia de Califòrnia, equacions diferencials que sembla que descriuren, acuradament fins a una certa mesura, almenys alguns d'aquests nous processos de difusió. De fet, es tracta d'una classe d'equacions que fins ara no s'ha investigat en la literatura matemàtica.

Per tal d'examinar la qualitat d'aquests models s'han fet càlculs numèrics extensius. Per reduir la complexitat de les equacions, a fi de mantenir el cost dels càlculs dins d'una fita raonable, es van fer una sèrie de suposicions simplificadores. Mentre que els tests numèrics sobre les equacions simplificades semblava que proporcionaven els efectes desitjats, mitjançant una anàlisi matemàtica es va poder mostrar que les solucions de les esmentades equacions simplificades no podien tenir de cap manera les propietats esperades, de forma que el model havia esdevingut irreal per l'oblit de termes essencials. Així, que hom hagué d'entendre's directament amb les equacions complicades, de les quals entretant, es va poder demostrar que estaven ben fonamentades.

Repercussions sobre la matemàtica

Naturalment, només es tracta d'haver ofert, amb els exemples que hem escollit, una petita mostra del vast domini de la interacció de la matemàtica amb altres disciplines científiques. Aquests contactes han estat sempre, en el decurs de la llarga història de les matemàtiques, d'una fertilitat extraordinària. Van impulsar el desenvolupament de disciplines matemàtiques senceres, les quals van ser investigades i reconstruïdes pel seu interès purament matemàtic, per una curiositat intel·lectual del tot aliena a cap aplicació concreta, només per constatar després de forma inesperada que tenien noves aplicacions a altres dominis. D'aquesta manera contribueixen considerablement al manteniment de la vivacitat i força d'aquesta antiga ciència.

Referències

1. R. Langer, *New methods in drug delivery*, Science, vol. 249, 1990, p. 1527-1533.

Herbert Amann és professor a l'Institut de Matemàtiques de la Universitat de Zuric.

Per què hi ha matemàtics que, no pas de mala gana, llegeixen sobre el temps

Matemàtica: un passatemps amb objectes inventats segons regles lliurement elegides? Els matemàtics entenen que es manegen idees. I la matemàtica té a veure amb la realitat. D'ambdós aspectes tracta aquesta contribució: de la modelització de processos reals i del treball matemàtic en els models.

URS KIRCHGRABER I URS RUF

Els homes han desitjat des de sempre poder preveure el futur. Hi ha una tradició que diu que els horòscops en els diaris de gran difusió contenen oportunitats. L'any 847 el matemàtic i astrònom Al-Khuwarizmi va ser cridat al llit del califa malalt. Ell compongué el seu horòscop i li profetitzà que viuria encara cinquanta anys. (Deu dies més tard va morir el califa.) El nom Al-Khuwarizmi, benemèrit en l'àlgebra, perdura en forma antiquada en la paraula *algorisme*. Avui a penes es troben matemàtics coneguts entre els astròlegs. Potser les preguntes, de les quals hom espera resposta fiable, s'han tornat més modestes. Tornarà a créixer l'any vinent el producte interior brut? Es pot planificar una volta per la muntanya o invitar a una festa en el jardí dintre de cinc dies?

Sovint els pronòstics resulten falsos. El que se'n burla, infravalora la pretensió que es proposa. Allò que és sorprenent no són els falsos pronòstics, sinó els que resulten vers. De fet, d'on traiem l'esperança de poder fer pronòstics correctes sobre qualsevol desenllaç? Òbviament, confiem en la nostra fantasia que desenvoluparà representacions aptes de processos reals. Si això, de fet, té lloc, no és pas sense reduccions dràstiques. Aquí la mesurabilitat és decisiva. Davant d'un procés ens representem una sèrie de magnituds característiques, les quals varien. Heus aquí un parell d'exemples. Els moviments dels cossos celestes en el nostre sistema planetari —dels planetes, de la Lluna i els planetoides— presenten un procés, que ha ocupat els homes des de l'antiguitat: les magnituds que varien són la posició i la velocitat dels cossos celestes. O bé el sistema del temps atmosfèric a tot el món. Aquí es tracta de com varien les temperatures locals, la pressió de l'aire i les velocitats dels vents. Finalment, el sistema mundial com fou investigat per D. i D. Meadows i J. Randers el 1972 (per encàrrec del Club de Roma) i el 1992. Aquí, demés de moltes altres magnituds, varien la població mundial, la producció industrial, la contaminació del medi ambient i el conjunt dels recursos naturals.

Què significa ara fer pronòstics sobre tals processos? La tasca científica que ens repta és la descripció dels desenvolupaments: com varien per un procés determinat les magnituds característiques? Donarà encara voltes la Terra al voltant del sol d'aquí a mil milions d'anys? Girarà encara aleshores la Terra una volta cada vint-i-quatre hores? Sobreviurà la humanitat encara dos-cents anys?

Matemàtica i processos reals. Una mirada històrica endarrera

Ja en la antiguitat s'intentà descriure els moviments dels planetes per mitjà de cercles que roden uns sobre altres. C. Ptolemeu (*ca.*87–165 dC) perfeccionà el sistema i aconseguí una precisió tan alta, que durà més de mil anys. En el segle XV N. Copèrnic (1473–1543) simplificà el sistema ptolemaic en passar de la descripció geocèntrica a la heliocèntrica. Al començament del segle XVII J. Kepler (1571–1630) volgué adaptar la versió copernicana de la teoria ptolemaica a les observacions de T. Brahe (1546–1601) que per al seu temps eren incomparablement precises. Al llarg d'aquest treball, que durant anys va requerir càlculs inimaginablement fatigosos, Kepler va descobrir les tres famoses lleis que porten el seu nom. Ell va emprar un objecte, l'el·lipse, per a descriure com els planetes es mouen al voltant del sol. Després que al llarg de segles la idea del moviment circular més que cap altra hagués inspirat els astrònoms —però alhora també els hagués esclavitzat— les descobertes de Kepler feren època. (En vida, certament, ell fou famós com a astròleg de primera línia —fins i tot ell!) On era l'astronomia després de Ptolemeu i Kepler? Mitjançant recursos diferents s'havien desenrotllat descripcions dels moviments dels planetes, que finalment havien aconseguit una precisió notable. La idea de descriure de manera purament fenomenològica processos dinàmics, és certament menys àmplia que el que es podria suposar. Per exemple, per a una descripció del processos del temps atmosfèric seria completament ineficaç.

Llei fonamental de la Mecànica. Un model matemàtic que obre camí

Ben passat mig segle el gran físic i matemàtic anglès I. Newton (1642–1727) descobrí que les lleis de Kepler són una conseqüència, més aviat senzilla d'un principi molt més general. La intuïció de Newton, que obria nous horitzons, fou que els moviments dels cossos celestes de la millor manera que es deixen descriure és microscòpicament. A diferència de Kepler, que a una òrbita planetària globalment observada feia correspondre l'objecte matemàtic ellipse, Newton va pensar localment i es va concentrar en les magnituds característiques del procés i en els seus increments. Ell postulà que els increments estan determinats per les magnituds característiques!

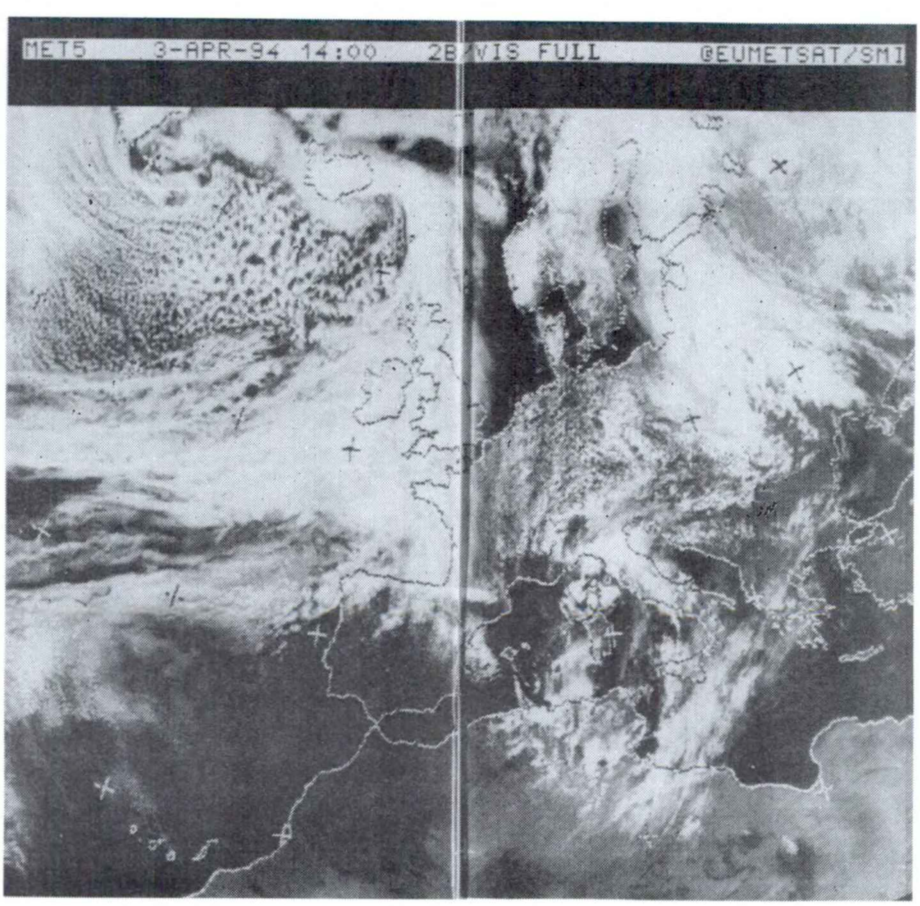
La seva llei fonamental de la mecànica enuncia: L'acceleració instantània d'un cos —o sigui l'increment de la seva velocitat— és proporcional a la força, que actua en aquell instant sobre ell, i aquesta depèn, si s'escau, de la posició i de la velocitat del cos. (Que els increments instantanis només depenguin dels valors instantanis de les magnituds del procés, no és evident de cap manera. Pensem només en les decisions humanes: aquestes no es prenen generalment basant-se solament en la situació present, sinó que són conseqüència d'històries enteres.) Amb la força de la gravetat, postulada simultàniament per ell, s'obté un nou i fonamental model per a la descripció de les òrbites planetàries. No obstant això, no sorgeix pas cap contradicció amb les lleis de Kepler: Si es consideren només dos cossos —el Sol i la Terra— s'obté precisament l'òrbita el·líptica de Kepler. Però, si es consideren endemés altres plantes, es mostra la força del principi newtonià: s'obtenen, amb comparació a Kepler, òrbites més complicades i que coincideixen d'una manera extraordinària amb les observades modernament.

Ben entès, ni Newton ni ningú podria o pot demostrar que els moviments dels planetes obeeixen radicalment el principi fonamental de Newton. (En virtut de la teoria de la relativitat d'Einstein, fins i tot estem obligats a dir que no ho fan!). La llei fonamental de la mecànica és un model matemàtic pels processos de moviment dinàmics. Les així anomenades lleis de la natura no són pas últimes i definitives veritats, sinó precisament models, és a dir, assaigs de descriure amb més o menys precisió i mitjançant entitats matemàtiques una part de la realitat. També el sistema ptolemaic i les lleis de Kepler són tals assaigs. Des d'aquest punt de vista no hi ha cap diferència de principi i important entre les teories dels moviments dels planetes de Ptolemeu, Kepler i Newton. Ara bé, la teoria de Newton està en tot d'acord, d'una manera extraordinària, amb les observacions exactes; i es distingeix per una molt més gran eficiència, és incomparablement més flexible i universal: permet d'abarcar un ample espectre de fenòmens de diversa naturalesa. La teoria de Newton —una creació humana d'alt encant estètic— ha esdevingut, de fet, el prototipus d'una teoria, la física. La descripció dels moviments dels líquids i dels gasos —fonament de l'aerodinàmica i de la meteorologia— dels camps electromagnètics, i dels processos de la física quàntica, són exemples de la formació de models segons aquesta mostra.

Pròpiament és una paradoxa. L'èxit de la formació de models matemàtics i la seva aplicació salta a la vista. Malgrat tot, hem de concedir que no comprenem per què els models matemàtics poden descriure processos reals. Sabem exactament com cau una poma, on es trobarà la Lluna dintre de mil anys i sobre quina òrbita vola una sonda cap a Mars, però no sabem el perquè. «Tot és nombre» deien els pitagòrics. Potser foren els primers que presentiren la importància de la matemàtica per a la descripció de la realitat. G. Galilei (1564–1642) afirmava triomfalment: «En el gran llibre de la natura, només hi pot llegir aquell que en coneix la llengua, en la qual aquest llibre està escrit, i aquesta llengua és la matemàtica». També el matemàtic alemany H. Neunzert, especialitzat en les aplicacions industrials, pensa d'una manera semblant quan ell qualifica la matemàtica com «clau de les tecnologies-clau». El físic americà E. Wigner pensava: «Que el llenguatge de la matemàtica sigui tan apropiat per a la formulació de les lleis fonamentals de la física, és un miracle, un regal meravellós, que ni entenem ni mereixem». El seu col·lega S. Weinberg certament subministra un complement interessant per a una imaginable explicació: suposant que una certa simplicitat serveix de fonament al món, li és apropiat un cert ordre. Un principal desig de la matemàtica és el descobriment i l'estudi de les formes d'ordre. Suposant que, de fet, només hi ha un cert nombre de formes de l'ordre, aleshores no resulta sorprenent que les estructures de les matemàtiques resultin apropiades per a la descripció de la física i àdhuc es comprèn que manta vegada els matemàtics aconsegueixin descobrir la matemàtica rellevant per a la física per endavant, és a dir, fins i tot abans que sigui necessària per a la física. Certament, la matematització no ha pas reeixit tant en totes les disciplines com en la física. La modelització dels processos dinàmics en la biologia o en l'economia, per exemple, és menys fiable. D'acord amb això, el model de D. i D. Meadows i J. Randers sobre el futur del món no queda pas lliure de controvèrsia.

Equacions diferencials. Un tema per als matemàtics dur de pelar

Després que en la primera part hem indicat com fou d'eficient la formació de models iniciada per Newton, considerem en aquesta segona part l'objecte matemàtic que Newton ha trobat per al seu propòsit. Ens referim a les *equacions diferencials*: equacions segons la mostra de la llei fonamental de la mecànica, ja mencionada. La investigació de les equacions diferencials és una de les tasques més interessants i exigents



Gràcies a la capacitat dels grans ordinadors es poden millorar els pronòstics del temps.

de la matemàtica. Es podria esperar que en els tres segles llargs des dels descobriments de Newton s'haguessin resolt els problemes més importants. Desgraciadament no és així. En primer lloc no pocs famosos matemàtics han resolt escollides equacions diferencials, d'una manera semblant a com es resolen a l'escola les equacions quadràtiques. La llista comprèn noms tan illustres com Leibniz, Euler, Gauss, Lagrange, Lord Rayleigh, Jacobi, Lie i d'altres. Però, sovint aquestes equacions diferencials no tenien cap importància pràctica; eren interessants només perquè se les podia resoldre per procediments enginyosos. Es tenia un notable instrument per a fer models matemàtics de processos reals, però sovint no es reeixia a resoldre les corresponents equacions. Aquesta discrepància astoradora no ha estat fins avui dia de cap manera superada.

Mètodes quantitatius de resolució

En principi hi ha dues classes de mètodes per a investigar equacions diferencials: els quantitatius i els qualitatius. En les recerques quantitatives, quan no es disposa de cap fórmula resolutiva, es determinen les solucions per aproximació. Una equació diferencial és un enunciat en petit, descriu la connexió entre les magnituds característiques d'un procés i els seus increments. Estableix com, partint d'un estat, es pot calcular la tendència al canvi. D'aquí es pot determinar aproximadament el curs del procés: del coneixement de l'estat en el moment actual, de l'estat inicial, es pot calcular la variació en el moment pròxim i d'aquí es pot obtenir l'estat següent; d'aquí, en resulta la variació en el moment després del pròxim, i també l'estat en el moment després del pròxim i així successivament. Per a aquests càlculs l'ordinador ofereix un mitjà insuperable. Aquestes aproximacions per ordinador són per a un viatge espacial tan indispensables com per al pronòstic diari del temps. Així i tot, el problema no queda pas liquidat. Puix, quant dura un moment: un dia, una hora, un milisegon...? El pròxim moment, de què tan lleugerament hem parlat, en realitat no existeix pas: sempre n'hi ha entremig un de més pròxim. També, el resultat és sempre només una aproximació; una aproximació, i aquí trobem la dificultat, de què no se sap com n'és de precisa. Pot ser, sense que ens n'adonem, tan dolenta, que resulti errònia i, per tant, sigui inútil.

Propietats qualitatives de les solucions

L'alternativa són mètodes qualitatius. Qui treballa en mètodes qualitatius es decideix a abordar el problema de les equacions diferencials des d'una altra posició. Descobreix que si només es vol obtenir una vista general del comportament d'un sistema, aleshores no és necessari descriure detalladament les solucions. La paternitat d'aquesta idea es deu al matemàtic francès Henri Poincaré (1854–1912). Ell reconegué que unes fórmules resolutives, àdhuc quan puguin ésser obtingudes, no són pas un valor digne de qualsevol esforç que calgui. Són molt més importants les propietats qualitatives o geomètriques de les solucions: d'una solució es vol saber si és creixent o periòdica (com $\sin x$), etc. L'estratègia de Poincaré era d'obtenir tals enunciats directament de l'equació diferencial. D'aquesta manera, obrí una nova perspectiva en el domini de les equacions diferencials. Amb un atac directe a les propietats essencials de les solucions, es poden estalviar la marrada per les fórmules resolutives, que generalment no es tenen a l'abast, i els càlculs amb ordinadors, que són insegurs; certament aquest procediment exigeix la sagacitat d'un Sherlock Holmes! Emprant una altra figura, hom es troba en el lloc d'un caricaturista que ha de dibuixar sobre el paper els trets típics d'una persona que ell desconeix completament. Poincaré va desenvolupar amb aquesta finalitat un conjunt de tècniques contundents.

Ara bé, de quina forma és un enunciat qualitatiu d'una solució d'una equació diferencial? Com es distingeix d'una descripció quantitativa? Això ha de ser aclarit mitjançant un exemple senzill: l'equació que descriu els moviments d'un pèndol. Els enunciats matemàtics que es poden obtenir sobre aquesta equació, ara els descriurem no pas mitjançant fórmules, sinó que els aclarirem en l'objecte físic pèndol. Per tant, parlarem del pèndol, però pensem en l'equació. Imaginem que el pèndol en el seu extrem superior està col·locat de tal manera que pot girar lliurement i sense fricció al voltant d'un eix a. Des d'un punt de vista qualitatiu es poden distingir cinc tipus de moviments:

– El pèndol pot estar penjat cap avall: està quiet (en una posició d'equilibri).

– Oscil·la, és a dir, es balanceja d'un costat a l'altre de la posició d'equilibri inferior. La màxima separació de la posició d'equilibri pot ser més gran o més petita.

– El pèndol gira, és a saber, gira durant tot el temps al voltant de l'eix de gir a, i naturalment, sempre en el sentit de les agulles del rellotge o sempre en el sentit contrari.

– La tija del pèndol està exactament vertical sobre l'eix de gir: el pèndol roman en la posició d'equilibri superior.

– El pèndol trepa cap a la posició d'equilibri superior i ho fa sempre més lentament: no cau cap endarrera ni tampoc arriba mai a dalt de tot. Aquest procés infinitament durador també ara pot ser en el sentit de les agulles del rellotge o en el sentit contrari.

També és interessant comparar ara les dues situacions d'equilibri. En la posició d'equilibri inferior, un petit cop donat al pèndol provoca una petita conseqüència: oscil·la dèbilment. L'equilibri és estable. Al contrari, si es guia el pèndol des de la posició d'equilibri superior o se li dóna un cop tan petit com es vulgui, la conseqüència és enorme: el pèndol oscil·la amb grans amplituds o fins i tot comença a girar. L'equilibri és inestable.

Aquests enunciats qualitatius donen un excel·lent resum sobre les solucions de l'equació diferencial del pèndol amb punt de sustentació fix. Però, moltes preguntes, que certament podrien ser d'interès, queden sense contestació. Quina és la duració del període d'oscil·lació en el cas d'una solució oscil·latòria? Com ha de ser de gran l'impuls perquè el pèndol giri i no oscil·li? On es troba exactament el pèndol en un moment determinat? Tals preguntes pertanyen al domini dels mètodes quantitatius. Poden ser contestades mitjançant les fórmules resolutives, que en aquest cas són a l'abast. Resulta molt diferent, alterant només molt poc el problema del pèndol. L'equació diferencial del pèndol amb un punt de sustentació fix passa a l'equació diferencial d'un pèndol, el punt de sustentació del qual oscil·la verticalment amb una petita amplitud. Per a aquesta equació no hi ha fórmules resolutives a l'abast. Al contrari, és possible una anàlisi qualitativa: aquesta mostra que el comportament del sistema és en certa manera impredictible. Si el pèndol gira en el sistema originari amb el punt de sustentació fix, gira sempre en el sentit de les agulles del rellotge o sempre en el sentit oposat. Per contra, en el sistema modificat el pèndol pot canviar el seu sentit de gir. Ara pot canviar i girar en el sentit de les agulles del rellotge i en el sentit contrari, i de tal manera que el nombre de voltes en cada un dels dos sentits és completament imprevisible! Què vol dir això en concret?

Impronosticabilitat d'un sistema sensible

Primer, representem-nos, encara una vegada més, la inestabilitat de la posició d'equilibri superior en el sistema originari amb el punt de suspensió fix. Una petita variació produeix amples oscillacions o fins i tot voltes del pèndol. És certament dramàtic, però no canvia res en la comprensió dels moviments possibles del pèndol en aquest sistema. Representem-nos un observador que segueix els possibles moviments i els descriu qualitativament portant-ne un protocol: si el pèndol va en el sentit de les agulles del rellotge i passa pel punt més baix, escriu una m (de *minus*); i si passa pel punt més baix en el sentit contrari al de les agulles del rellotge escriu una p (de *plus*). D'aquesta manera a cada moviment correspon una successió de m i p. En total, només es poden presentar exactament tres diferents protocols: la successió de m soles, la successió de p soles i la successió en què p i m alternen. Els protocols apareixen ben diferents quan es considera el sistema amb un punt de suspensió oscil·lant. L'anàlisi matemàtica demostra que, donada una successió arbitrària de m i p, aquesta pot ser obtinguda com a protocol. Per a un observador això significa: per molt de temps que ell segueixi el moviment del pèndol, per molt llarg que sigui el fragment de protocol de què disposa: si s'escau, ell no pot pronosticar quin serà el següent registre en el protocol! Per exemple, sigui $mpmmpppppmppmpmp$ el fragment de protocol, que es pot continuar de dues maneres, a saber, o amb una p o amb una m; doncs bé, per ambdues prolongacions hi ha un moviment corresponent. Si es consideren els deu registres següents, hi ha 2^{10} o sigui 1.024 possibilitats de continuar la successió de p i m, i de nou cada una d'elles pot ser realitzada.

La impronosticabilitat d'aquest sistema també es pot descriure d'una altra manera. Considerem dos moviments, els protocols dels quals coincideixen en un llarg fragment; d'això, es pot deduir que els seus estats inicials eren pròxims l'un a l'altre, i tant més pròxims com més llarga era la coincidència dels protocols. Considerant-ho a la inversa, això significa: petites variacions dels estats inicials tenen grans conseqüències. Es poden presentar dos pèndols, que al principi es mouen gairebé sincrònicament i després imprevisiblement —quan els seus protocols comencen a diferenciar-se— perden la sincronia i se separen. Des d'un punt de vista quantitatiu, se separen exponencialment l'un de l'altre. Es diu que el comportament d'aquest sistema és sensible. Com que els estats inicials mai no poden ser determinats o realitzats amb precisió infinita, el comportament a llarg termini d'un sistema sensible no és pronosticable.

Comportament caòtic

L'equació diferencial del pèndol amb punt de suspensió oscil·lant correspon certament a un sistema real i físic, però que no té pas una gran importància pràctica; és important perquè mostra que el comportament *caòtic* es pot donar fins i tot en sistemes senzills, i és important perquè mitjançant aquest exemple entenem completament l'índole de la inestabilitat i podem demostrar que té propietats caòtiques. A part d'això, exactament aquest mecanisme caòtic fou descobert ja per Poincaré al final del segle passat; però no fou fins els anys seixanta que el matemàtic americà S. Smale va crear el marc per a una teoria matemàtica satisfactòria.

El fenomen del comportament caòtic és astorador! Una equació diferencial descriu un procés determinístic: l'estat inicial determina el transcurs del procés per a tot el futur. Malgrat això, quan l'equació diferencial és sensible, el futur no és pronosticable. Aquesta asseveració, que al primer cop d'ull sembla contradictòria és un fonament de la fascinació de la qüestió del caos. Malgrat que el fonament del comportament caòtic fou descobert fa més de cent anys, el fenomen, àdhuc entre matemàtics, físics i naturalistes, no fou generalment conegut fins fa dues desenes d'anys. La revolució dels ordinadors amb la possibilitat de poder portar a terme enormes quantitats de càlculs i de poder representar gràficament els resultats en diferents formes, hi ha jugat un paper molt important. Molts sistemes han estat investigats: processos de fricció de rotors ràpids (interessen en la construcció de camps magnètics), sistemes de làser, el peculiar comportament orbital dels satèl·lits Janus i Epimeteu de Saturn, el caos en els corrents, el temps atmosfèric, només per anomenar alguns exemples. Però, els models matemàtics de processos reals són tan complicats, que demostracions matemàtiques per als comportaments caòtics, almenys actualment, semblen inabastables. Per contra, juguen un gran paper les simulacions amb ordinador: hi ha tota una sèrie de tests que sobre el fonament de càlculs voluminosos denoten la possibilitat de comportaments caòtics.

Simulació per ordinador de sistemes caòtics

Hom es pot meravellar de la importància dels càlculs amb ordinadors especialment en els sistemes caòtics. Ja que una calculadora només pot treballar amb un determinat nombre de xifres o posicions (per exemple 10 posicions), àdhuc una simple multiplicació de dos nombres no pot ser efectuada exactament, sempre es comet un error, d'arrodoniment. La simulació a llarg termini d'un procés dinàmic per ordinador exigeix moltíssimes addicions, multiplicacions, etc. Ara bé, en els sistemes sensibles, com hem vist, fins i tot un petit error, ja en l'estat inicial i després d'un temps curt, produeix una conseqüència catastròfica; què han de fer, aleshores, càlculs numèrics en els quals s'estan cometent errors contínuament? Suposem que A_t sigui el curs del procés que ens interessa i B_t la seva simulació obtinguda mitjançant l'ordinador. Si el procés en qüestió és sensible, la diferència entre B_t i A_t creix exponencialment al llarg del temps t, de manera que la simulació ofereix un bon pronòstic només si és a curt termini. Ara bé, resulta interessant que sota certes condicions es pot demostrar que hi ha un curs A_t del procés, el qual certament s'aparta exponencialment de A_t, però que corre sempre a la vora de B_t, a saber, la diferència entre B_t i A_t resta petita. O bé, emprant la metàfora del temps: Hi ha, en efecte, un temps que s'aproxima al pronosticat pels meteoròlegs, només que no és pas el que viurem!

Urs Kirchgraber és professor de matemàtiques a l'ETH de Zuric, i Urs Ruf és professor de llengua i literatura a l'Escola Cantonal de Zuric Oberland i professor encarregat a la Universitat de Zuric.